

EXERCICES DE  
MÉCANIQUE ANALYTIQUE  
(L2-L3)

et leurs solutions

**Christian Carimalo**



**Exercices n° 1**

- Cinématique -

**I** - Représenter les hodographes des mouvements dont les équations horaires, relativement à un repère cartésien  $Oxyz$ , sont données ci-dessous :

(a)  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r_0}$ ,  $\overrightarrow{r_0}$  étant un vecteur constant ;

(b)  $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}(t - t_0)$ ,  $\overrightarrow{v_0}$  étant un vecteur constant ;

(c)  $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}(t - t_0) + \overrightarrow{g} \frac{(t - t_0)^2}{2}$ ,  $\overrightarrow{g}$  étant l'accélération de la pesanteur ;

(d)  $\overrightarrow{r}(t) = a \sin(\omega t + \phi_1) \overrightarrow{e_x} + b \sin(\omega t + \phi_2) \overrightarrow{e_y}$ , où  $a$ ,  $b$ ,  $\omega$ ,  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont des constantes, et  $\overrightarrow{e_x}$  et  $\overrightarrow{e_y}$  les vecteurs unitaires respectifs des axes  $Ox$  et  $Oy$ .

**II** - On considère un mouvement plan (dans le plan  $xOy$ ) dont la trajectoire est donnée sous forme implicite par l'équation  $f(x, y) = 0$ . Montrer que si le vecteur  $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{v}$  reste constant, le vecteur vitesse est donné par la relation

$$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{J} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} f}{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f}$$

où  $\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y} \overrightarrow{e_y}$ . Etudier le cas où

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

**III** - Un avion a effectué un trajet fermé  $ABCA$  suivant les côtés  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{CA}$  d'un triangle  $ABC$ . La vitesse (scalaire) de l'avion par rapport à l'air ambiant est constante et égale à  $v'$ . Cependant, la durée de vol est modifiée du fait d'un vent soufflant à la vitesse constante  $\overrightarrow{V_0}$ , et les distances  $AB$ ,  $BC$  et  $CA$  sont en fait couvertes par l'avion dans des durées respectivement notées  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$ . Trouver  $v'$  et  $\overrightarrow{V_0}$ .

**IV** - Un chien poursuit un lièvre en adaptant toujours de façon continue la direction de sa course vers cette "cible mobile". Trouver la trajectoire du chien en supposant que le lièvre court à la vitesse constante  $\overrightarrow{V} = V \overrightarrow{e_y}$  et que la vitesse scalaire du chien est elle aussi

constante et égale à  $c > V$ , sachant qu'à la date  $t = 0$ , alors que le lièvre passe au point  $(b, 0)$ , le chien, qui se trouvait en  $(0, 0)$ , commence sa course-poursuite avec la vitesse initiale  $c \vec{e}_x$ .

**V** - Trouver l'équation paramétrique de la courbe tracée par un point solide d'une roue de rayon  $a$  qui roule sans glisser le long de l'axe  $Ox$ . Trouver sa vitesse et son accélération en supposant que la roue avance à vitesse constante  $V$  le long de l'axe  $Ox$ .

**VI** - Un point  $M$  décrit une trajectoire selon les équations horaires

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = b\omega t$$

où  $a$ ,  $b$  et  $\omega$  sont des constantes positives.

1°) Quelle est la trajectoire de  $M$  ?

2°) Déterminer les composantes cylindriques du vecteur unitaire  $\vec{T}$  tangent à la trajectoire.

3°) Déterminer les composantes cylindriques du vecteur unitaire  $\vec{N}$  définissant la normale principale de la trajectoire.

4°) Montrer que le rayon de courbure de la trajectoire est constant.

## Solutions n° 1

**I - Rappel :** L'hodographe est la trajectoire du point fictif  $P$  défini par  $\vec{OP} = \vec{V}(t)$ .

a)  $\vec{V} = \vec{0}$  :  $P$  et  $O$  sont confondus.

b)  $\vec{V} = \vec{v}_0$  :  $P$  est fixe.

c)  $\vec{V} = \vec{v}_0 + \vec{g}(t - t_0)$  :  $P$  décrit la droite parallèle à l'axe des  $z$  qui passe par le point  $P_0$  tel que  $\vec{OP}_0 = \vec{v}_0$ .

d)  $\vec{V} = \omega \left[ a \cos(\omega t + \phi_1) \vec{e}_x + b \cos(\omega t + \phi_2) \vec{e}_y \right]$ . Si  $\phi_1 = \phi_2$ , on a

$$\vec{V} = \omega \cos(\omega t + \phi_1) \left[ a \vec{e}_x + b \vec{e}_y \right]$$

et  $P$  décrit un mouvement sinusoïdal autour de  $O$ , sur la droite passant par  $O$  et parallèle au vecteur  $a \vec{e}_x + b \vec{e}_y$ . Si  $\phi_1 \neq \phi_2$ , on pose  $\psi = \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$ ,  $\phi = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}$ , de sorte que  $\omega t + \phi_1 = \psi + \phi$ ,  $\omega t + \phi_2 = \psi - \phi$ , d'où

$$\vec{V} = \omega \left[ a \cos(\psi + \phi) \vec{e}_x + b \cos(\psi - \phi) \vec{e}_y \right]$$

Posons  $x = \cos(\psi + \phi)$ ,  $X = a\omega x$ ,  $y = \cos(\psi - \phi)$ ,  $Y = b\omega y$ . Pour trouver l'équation de la trajectoire de  $P$ , il faut éliminer  $t$ , ou  $\psi$ . On a

$$\cos \psi = \frac{x + y}{2 \cos \phi}, \quad \sin \psi = \frac{y - x}{2 \sin \phi} \quad \text{d'où} \quad x^2 + y^2 - 2xy \cos 2\phi = \sin^2 2\phi$$

C'est l'équation d'une ellipse. Sa forme cartésienne s'obtient en effectuant une rotation :

$$X' = X \cos \theta + Y \sin \theta, \quad Y' = -X \sin \theta + Y \cos \theta, \quad \text{ou}$$

$$X = X' \cos \theta - Y' \sin \theta, \quad Y = X' \sin \theta + Y' \cos \theta$$

tout en prenant  $\tan 2\theta = \frac{2 \cos 2\phi}{ab} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right)^{-1}$  pour éliminer de l'équation le terme en  $X'Y'$  et finalement obtenir

$$\frac{X'^2}{A^2} + \frac{Y'^2}{B^2} = 1, \quad \text{avec} \quad A^2 = \frac{\omega^2 a^2 \sin^2 2\phi}{(1 - \cos 2\phi \sin 2\theta)}, \quad B^2 = \frac{\omega^2 b^2 \sin^2 2\phi}{(1 + \cos 2\phi \sin 2\theta)}$$

**II** - Le vecteur vitesse est selon la tangente à la trajectoire, tandis que  $\vec{\text{grad}} f$  est selon sa normale. Les deux vecteurs sont donc orthogonaux et

$$\vec{J} \wedge \vec{\text{grad}} f = - \vec{\text{grad}} f \wedge (\vec{r} \wedge \vec{v}) = (\vec{\text{grad}} f \cdot \vec{v}) \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{\text{grad}} f) \vec{v}, \text{ d'où}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{J} \wedge \vec{\text{grad}} f}{\vec{r} \cdot \vec{\text{grad}} f}$$

• Cas de l'ellipse.

Le vecteur  $\vec{J}$  étant constant, on a  $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ . La trajectoire n'étant pas rectiligne, le vecteur vitesse ne peut être constant et l'on en conclut que l'accélération est parallèle à  $\vec{r}$  (mouvement à force centrale). En coordonnées polaires  $(r, \theta)$  :

$$\vec{J} = r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = C \vec{e}_z, \text{ soit } r^2 \dot{\theta} = C$$

où  $C$  est une constante. Posons  $x = r \cos \theta = a \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \theta = b \sin \alpha$ . On a donc  $\tan \alpha = \frac{a}{b} \tan \theta$ . En dérivant, on obtient

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{a \cos^2 \alpha}{b \cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dt} = C \frac{a \cos^2 \alpha}{b r^2 \cos^2 \theta} = C \frac{a \cos^2 \alpha}{b x^2} = \frac{C}{ab}, \text{ d'où}$$

$$\alpha = \frac{C}{ab} t + \alpha_0$$

où  $\alpha_0$  est une constante que l'on peut prendre égale à 0 en ajustant les conditions initiales. Posant  $K = \frac{C}{ab}$ , on obtient ainsi les équations horaires :

$$x = a \cos Kt, \quad y = b \sin Kt$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \tan(Kt), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2} \cos(2Kt)}$$

### Remarques

1°) L'accélération est  $\vec{\gamma} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y = -K^2 \vec{r}$  : on a affaire au champ de force central attractif  $\vec{F} = -\frac{K^2}{m} \vec{r}$ .

2°) On se rappelle qu'une ellipse est une projection orthogonale d'un cercle sur un plan faisant un certain angle  $\beta$  avec le plan dudit cercle. Supposons  $a > b$  et définissons  $\cos \beta = b/a$ ,  $Y = y / \cos \beta$ . On a alors  $x^2 + Y^2 = a^2$ . Vu dans les trois dimensions, un point  $M$  de l'ellipse est la projection dans le plan  $xOy$  d'un point  $N$  de coordonnées  $(x, Y)$  situé dans un plan contenant les axes  $Ox$  et  $Oz$  et dont la normale fait l'angle  $\beta$  avec  $Oz$ . Dans ce

plan, ce point  $N$  est animé d'un mouvement circulaire uniforme sur le cercle de centre  $O$  et de rayon  $a$ .

**III** -  $\vec{AB} = \vec{V}_1 t_1$ ;  $\vec{BC} = \vec{V}_2 t_2$ ;  $\vec{CA} = \vec{V}_3 t_3$ , avec  $\vec{V}_1 = \vec{V}_0 + \vec{v}'_1$ ,  $\vec{V}_2 = \vec{V}_0 + \vec{v}'_2$ ,  $\vec{V}_3 = \vec{V}_0 + \vec{v}'_3$ ,  $|\vec{v}'_1| = |\vec{v}'_2| = |\vec{v}'_3| = v'$ . Comme  $\sum_i \vec{V}_i t_i = \vec{0}$ , il vient

$$\sum_i v_i'^2 t_i = V_0^2(t_1 + t_2 + t_3) + V_1^2 t_1 + V_2^2 t_2 + V_3^2 t_3, \text{ soit}$$

$$v'^2 = V_0^2 + \frac{V_1^2 t_1 + V_2^2 t_2 + V_3^2 t_3}{t_1 + t_2 + t_3} = V_0^2 + \frac{V_1^2 t_1 + V_2^2 t_2 + V_3^2 t_3}{t_1 + t_2 + t_3}$$

De  $\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} = \vec{V}_0 \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$  et  $\frac{V_1^2 - V_3^2}{2} = \vec{V}_0 \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_3)$  on tire  $V_{0x}$  et  $V_{0y}$  (en explicitant les produits scalaires) puis, après quelques arrangements,

$$V_0^2 = \frac{1}{D^2} \left[ (V_3^2 - V_2^2) \vec{V}_1 + (V_1^2 - V_3^2) \vec{V}_2 + (V_2^2 - V_1^2) \vec{V}_3 \right]^2, \text{ où}$$

$$D^2 = \left| (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \wedge (\vec{V}_1 - \vec{V}_3) \right|^2 = \left| \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 + \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1 \right|^2$$

Remarque : il est normal que  $V_0$  ne dépend pas des durées  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  !

Pour obtenir le vecteur  $\vec{V}_0$ , on peut avoir recours à la représentation graphique suivante. A partir d'un point  $O$ , on trace les directions des vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$  et  $\vec{CA}$ , et l'on porte sur la première le point  $M$  tel que  $\vec{OM} = \vec{V}_1$ , sur la seconde le point  $N$  tel que  $\vec{ON} = \vec{V}_2$ , et sur la troisième le point  $P$  tel que  $\vec{OP} = \vec{V}_3$ . Puisque  $|\vec{v}'_1| = |\vec{v}'_2| = |\vec{v}'_3| = v'$ , les trois points sont équidistants d'un point  $C$ , et ce point est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle  $MNP$ , point de concours des médiatrices de ce triangle. On a alors  $\vec{V}_0 = \vec{OC}$ .

**IV** - En notant  $\alpha$  l'angle que fait avec l'axe des  $x$  la tangente à la trajectoire, on a

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = y' = \frac{Vt - y}{b - x}, \text{ et}$$

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dx)^2(1 + y'^2) = c^2(dt)^2, \text{ soit}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \sqrt{1 + y'^2} = y''(b - x)/V \text{ et } \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{V}{c} \frac{1}{b - x}$$

Pour intégrer, on pose  $y' = \sinh u$ ,  $\alpha = V/c$ . D'où  $y'' = u' \cosh u = u' \sqrt{1 + y'^2}$  et  $u' = \frac{\alpha}{b - x}$ , soit  $u = -\alpha \ln(b - x) + \text{constante}$ . La constante est déterminée par la condition initiale :  $y'(0) = 0$ , d'où l'on déduit  $u(0) = 0$ . La constante est donc nulle et

$$u = \alpha \ln\left(\frac{b}{b-x}\right)$$

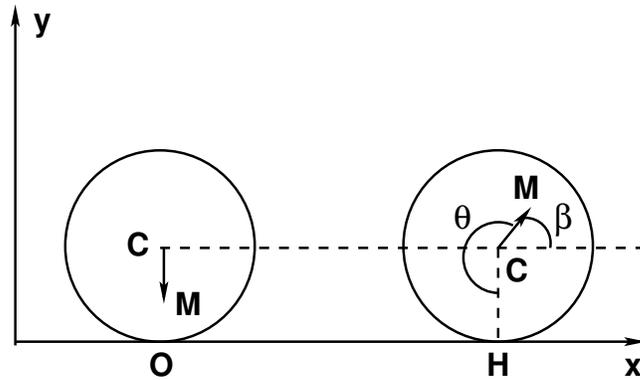
On en tire  $y'$  :

$$y' = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-\alpha} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{\alpha} \quad \text{puis } y :$$

$$y = \frac{b\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{b}{2} \left\{ \frac{1}{1+\alpha} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{1+\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{1-\alpha} \right\}$$

après avoir ajusté la constante d'intégration à la condition initiale  $y(0) = 0$ .

### V - Cycloïde



$\vec{OM}(t) = \vec{OH} + \vec{HC} + \vec{CM}(t)$ ;  $x = \overline{OH} + \vec{e}_x \cdot \vec{CM}(t)$ . Or,  $\overline{OH} = a\theta$ , donc  $x = a\theta + d \cos \beta$ ;  $y = a + \vec{e}_y \cdot \vec{CM}(t) = a + d \sin \beta$ , avec  $d = CM$ . Or,  $\cos \beta = -\sin \theta$ ,  $\sin \beta = -\cos \theta$ , d'où

$$x = a\theta - d \sin \theta, \quad y = a - d \cos \theta$$

Si  $\overline{OH} = Vt$ , en posant  $\omega = V/a$ , on a

$$\begin{aligned} x &= a\omega t - d \sin \omega t, & y &= a - d \cos \omega t \\ v_x &= a\omega - d\omega \cos \omega t, & v_y &= d\omega \sin \omega t, & (v_x - a\omega)^2 + v_y^2 &= \omega^2 d^2 \quad (\text{cercle}) \\ \gamma_x &= d\omega^2 \sin \omega t, & \gamma_y &= \omega^2 d \cos \omega t \end{aligned}$$

### VI - Hélice

1°) Comme  $x^2 + y^2 = a^2$ , la projection de la trajectoire dans le plan  $xOy$  est un cercle. La trajectoire s'inscrit donc sur un cylindre d'axe  $z'z$  et de rayon  $a$  : c'est une hélice. En coordonnées cylindriques,  $\rho = a$ ,  $\varphi = \omega t$ ,  $z = b\varphi$ . Le pas de l'hélice est constant et égal à  $\Delta z = 2\pi b$ .

2°)  $v_x = -\omega a \sin \omega t$ ,  $v_y = \omega a \cos \omega t$ ,  $v_z = \omega b$ ,  $v = |\vec{v}| = \omega \sqrt{a^2 + b^2}$ ;  $\vec{T} = \vec{v}/v = \left[ a(-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y) + b \vec{e}_z \right] / \sqrt{a^2 + b^2}$ , soit

$$\vec{T} = \frac{a \vec{e}_\varphi + b \vec{e}_z}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad T_\rho = 0, \quad T_\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad T_z = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3°) et 4°)  $ds = v dt = \sqrt{a^2 + b^2} d\varphi$ ;  $\vec{N} = \mathcal{R} \frac{d\vec{T}}{ds} = \mathcal{R} \frac{a}{a^2 + b^2} (-\vec{e}_\rho)$ , d'où, en considérant les normes des vecteurs :

$$\vec{N} = -\vec{e}_\rho, \quad \mathcal{R} = \frac{a^2 + b^2}{a}$$

## Exercices n° 2

### - Dynamique -

**I** - Un projectile, assimilable à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , est lancé depuis un point  $O$  du sol terrestre avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  contenue dans un plan vertical  $zOx$  et faisant l'angle  $\alpha$  avec l'axe horizontal  $Ox$  (l'axe  $Oz$  est selon la verticale ascendante). Dans son mouvement, il subit un freinage dû à l'air ambiant. Cet effet est représenté par la force de freinage  $\vec{f} = -k \vec{v}$ , opposée à la vitesse instantanée  $\vec{v}$  du projectile ( $k > 0$ ). On étudie le mouvement du projectile dans le référentiel terrestre local, considéré comme galiléen pendant la durée de l'expérience.

1°) Ecrire les équations différentielles du mouvement du projectile.

2°) En déduire, par intégration, les composantes de son vecteur vitesse. Quelles en sont les limites lorsque  $t \gg m/k$  ?

3°) a) Trouver ensuite les équations horaires  $x(t)$  et  $z(t)$  décrivant le mouvement du projectile.

b) Donner l'allure de la trajectoire de  $M$ .

4°) On suppose  $k/m \ll 1$ . Trouver les expressions correspondantes de  $x(t)$  et de  $z(t)$ , à des termes d'ordre  $(k/m)^2$  près.

**II** - L'équation différentielle permettant de prédire l'évolution temporelle d'un oscillateur harmonique non amorti à une dimension s'écrit

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \text{ ou } \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$  étant sa pulsation propre.

1°) A l'aide d'un exemple simple, rappeler comment est établie cette équation.

2°) a) Etablir l'intégrale première de l'énergie, notée  $E$ .

b) En déduire l'expression de  $\frac{dx}{dt}$  en fonction de  $x$ ,  $k$ ,  $m$  et  $E$ .

3°) Montrer alors que la relation entre  $t$  et  $x$  peut être exprimée au moyen de la formule

$$t = t_0 \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^x \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}u^2}}$$

où  $t_0$  et  $x_0$  sont des constantes devant être ajustées aux conditions initiales.

4°) Calculer l'intégrale précédente en effectuant le changement de variable  $u = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \phi$  et en déduire  $x(t)$  en supposant que pour  $t = 0$  on a  $\frac{dx}{dt} = 0$  et  $x = x_0$ . Exprimer  $E$  en fonction de  $x_0$ .

**III** - Une fusée est lancée verticalement à partir du sol terrestre avec une vitesse initiale nulle. La propulsion de la fusée est assurée par l'éjection de gaz vers l'arrière de la fusée, avec, relativement à cette dernière, une vitesse  $\vec{w} = -w \vec{e}_z$  supposée constante. Ces gaz proviennent de la combustion de carburant dans le moteur de la fusée. De ce fait, la masse de l'ensemble de la fusée proprement dite et du combustible propulsif diminue au cours du lancement. Au départ, sa valeur est  $m_0$ . A la date  $t$  elle est devenue  $m(t)$ . Le débit de gaz propulsifs est supposé constant. On a donc

$$\frac{dm}{dt} = -\rho = \text{constante}$$

On note  $\vec{v}$  la vitesse instantanée de la fusée relativement au référentiel terrestre assimilable à un référentiel galiléen pendant la durée du lancement. Le champ de gravitation terrestre est supposé constant et de module  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . On négligera les forces de frottement de l'atmosphère.

1°) En faisant le bilan de quantité de mouvement entre les dates  $t$  et  $t + dt$ , alors que la masse de gaz éjectée est  $-dm$ , montrer que la quantité de mouvement  $\vec{p}$  de la fusée aura varié de

$$d\vec{p} = m \vec{g} dt + dm (\vec{v} + \vec{w})$$

2° a) En prenant  $m$  comme variable au lieu de  $t$ , montrer que l'altitude  $z$  de la fusée doit vérifier l'équation

$$\frac{d^2z}{dm^2} = -\frac{g}{\rho^2} + \frac{w}{m\rho}$$

b) Intégrer cette équation et déduire  $z(m)$  puis  $z(t)$ , compte-tenu des conditions initiales.

c) A quelle condition la fusée peut-elle décoller ?

3°) On donne ci-après les caractéristiques de la fusée Saturne V : masse initiale  $m_0 \approx 2800$  tonnes ; le premier étage propulseur contient 2000 tonnes d'ergol, mélange de kérosène et d'oxygène liquide, dont la combustion délivre une poussée de 33450 kN, la poussée étant définie comme le produit du débit de gaz éjectés par la vitesse (relative) d'éjection, soit  $|w dm/dt|$  ; la combustion du premier étage dure 150 s, après quoi le premier étage est séparé du reste de la fusée.

A l'aide de ces données, évaluer numériquement : la vitesse d'éjection des gaz du premier étage de la fusée ; la vitesse de la fusée et son altitude au moment de la séparation du premier étage.

**IV** - On envisage le mouvement d'un pendule simple dans un laboratoire terrestre. On admet que le référentiel du laboratoire peut être considéré comme galiléen pendant la durée de l'observation. On note  $O$  l'extrémité fixe du pendule,  $Ox$  la verticale locale *descendante* passant par  $O$  et  $Oy$  un axe horizontal. On ne considère que les mouvements s'effectuant dans le plan  $yOx$ . L'extrémité mobile du pendule en laquelle est attachée une masse ponctuelle  $m$  est notée  $M$ . La longueur du fil rigide, inextensible et sans masse joignant  $O$  à  $M$  vaut  $\ell$ , et l'on note  $\theta$  l'angle entre ce fil et la verticale  $Ox$  à un instant donné. A la date  $t = 0$ , alors que  $\theta = \theta_0 < \pi$ , on lâche la masse  $m$  sans vitesse initiale. On néglige tout frottement.

1°) Exprimer les composantes radiales et orthoradiales de la vitesse  $\vec{v}$  et de l'accélération  $\vec{a}$  de  $M$ , en fonction de  $\theta$  et de ses dérivées temporelles, et de  $\ell$ .

2°) Appliquer la relation fondamentale de la Dynamique à la masse  $m$  dans le référentiel du laboratoire et en déduire l'équation d'évolution de l'angle  $\theta$ .

3°) Définir l'énergie mécanique de la masse  $m$  et démontrer la relation

$$\ell \dot{\theta}^2 = 2g(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur terrestre.

4°) a) Montrer que le mouvement de la masse  $m$  est périodique et que sa période est donnée par

$$\tau = \frac{4}{\omega} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}, \quad \text{où } \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

b) Faire le changement de variable  $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \alpha$  et montrer que

$$\tau = \frac{4}{\omega} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \alpha}}$$

c) Montrer que pour des petits angles  $\theta_0$ , on a approximativement

$$\tau \approx \tau_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

où  $\tau_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ . Pour quelles valeurs de  $\theta_0$  a-t-on  $\tau = \tau_0$  avec une précision moindre que i)  $10^{-2}$  ? ii)  $10^{-4}$  ?

5°) Montrer que la connaissance de l'accélération normale  $a_N$  de  $M$  permet de déterminer la tension  $\vec{T}$  du fil. En quels points de la trajectoire l'amplitude de cette tension est-elle maximum ou minimum ?

V - Dans cet exercice on veut étudier l'influence du Soleil sur la répartition des eaux des océans. Dans un modèle simplifié, on suppose que la Terre est sphérique et entièrement recouverte d'une couche uniforme d'eau liquide. L'influence (pourtant primordiale) de la Lune sera ici ignorée. On notera  $O$  le centre de la Terre,  $S$  le centre du soleil,  $M_S$  la masse du Soleil,  $M_T$  la masse de la Terre,  $G$  la constante universelle de gravitation.

1°) Retrouver l'expression de la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour du Soleil en assimilant la trajectoire de la Terre à un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $S$  et de rayon  $D$ .

Dans la suite de l'exercice, les axes du repère  $\mathcal{R}_T(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , de centre  $O$ , lié à la Terre, seront choisis de la manière suivante :  $\vec{e}_y$  est suivant  $\vec{OS}$ ,  $\vec{e}_z$  est perpendiculaire au plan de la trajectoire de la Terre,  $\vec{e}_x$  est suivant la tangente à cette trajectoire, dans le sens du mouvement de rotation de la Terre.

2°) a) Montrer que, dans le référentiel  $\mathcal{R}_T$ , la résultante, par unité de masse, des forces extérieures agissant sur les masses d'eau en un point  $M(x, y, z)$  s'écrit

$$\vec{f} = -GM_S \frac{\vec{SM}}{SM^3} - GM_T \frac{\vec{OM}}{OM^3} - \omega^2 \vec{OS} + \omega^2 (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y)$$

b) Montrer que cette force dérive du potentiel

$$V(x, y, z) = -\frac{GM_S}{SM} - \frac{GM_T}{OM} + \omega^2 D y - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

3°) Considérant que  $|x|$ ,  $|y|$  et  $|z|$  sont très petits devant  $D$ , montrer qu'en première approximation on a

$$V(x, y, z) \approx -\frac{GM_S}{D} - \frac{GM_T}{OM} + \frac{\omega^2}{2} (z^2 - 3y^2)$$

4°) On considère que la surface libre des océans est une surface équipotentielle du potentiel  $V(x, y, z)$ . En l'absence d'astre perturbateur, ce potentiel s'écrirait

$$V(x, y, z) = -\frac{GM_T}{OM}$$

et l'équation  $V = \text{constante}$  donnerait pour  $r = OM$  une valeur constante, soit  $r = R_T$ . Dans le cas réel, la surface libre sera définie par

$$-\frac{GM_T}{OM} + \frac{\omega^2}{2} (z^2 - 3y^2) = \text{constante}$$

avec  $OM = r = R_T + \Delta r$ , où, a priori,  $|\Delta r| \ll R_T$ . Montrer que

$$\Delta r = A + \frac{\omega^2}{2g} (3y^2 - z^2)$$

où  $A$  est une constante et où  $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$  est, en première approximation, l'accélération de la pesanteur terrestre.

5°) a) Ecrivant ensuite que  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \approx R_T^2 + 2R_T\Delta r$ , montrer que l'intersection de la surface libre avec le plan  $x = 0$  est une ellipse dont on donnera les longueurs  $a$  et  $b$  des axes.

b) Montrer que  $h = |b - a| \approx \frac{2\omega^2 R_T^2}{g}$  et évaluer numériquement  $h$ , ce qui donne une première idée de l'influence du soleil sur les marées.

**Solutions n° 2**

**I - Projectile** 1°), 2°) Par application de la relation fondamentale de la dynamique, l'équation différentielle du mouvement est

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} - k \vec{v}, \quad \text{soit} \quad \alpha \vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{k}{m}$$

On a  $e^{\alpha t} (\alpha \vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt}) = \frac{d}{dt} [e^{\alpha t} \vec{v}] = e^{\alpha t} \vec{g}$ , et après intégration :

$$\vec{v} = \left( \vec{v}_0 - \frac{1}{\alpha} \vec{g} \right) e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha} \vec{g}$$

où la constante d'intégration a été ajustée à la condition initiale  $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$ . Pour  $\alpha t \gg 1$  on a  $\vec{v}_{\text{lim}} = \frac{m}{k} \vec{g}$ .

$$3^\circ) \text{ a) b) } \vec{OM} = \frac{1}{\alpha} \vec{g} t + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \left( \vec{v}_0 - \frac{1}{\alpha} \vec{g} \right)$$

$$4^\circ) \vec{OM} = \vec{v}_0 \left( t - \frac{\alpha t^2}{2} + \frac{\alpha^2 t^3}{6} \right) + \vec{g} \left( \frac{t^2}{2} - \frac{\alpha t^3}{6} + \frac{\alpha^2 t^4}{24} \right)$$

$$x(t) = v_{0x} \left( t - \frac{\alpha t^2}{2} + \frac{\alpha^2 t^3}{6} \right), \quad z(t) = v_{0z} \left( t - \frac{\alpha t^2}{2} + \frac{\alpha^2 t^3}{6} \right) - g \left( \frac{t^2}{2} - \frac{\alpha t^3}{6} + \frac{\alpha^2 t^4}{24} \right)$$

**II - Oscillateur non amorti** 2°) a), b)  $E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{constante}$ , d'où

$$|\dot{x}| = \sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{1 - \frac{kx^2}{2E}}$$

$$3^\circ) \frac{dt}{dx} = \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{kx^2}{2E}}}, \quad \text{d'où} \quad t = t_0 \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^x \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E} u^2}}$$

$$4^\circ) u = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \phi, \quad \text{d'où} \quad 1 - ku^2/(2E) = \cos^2 \phi, \quad du = \sqrt{\frac{2E}{k}} \cos \phi d\phi, \quad \text{et}$$

$$t = t_0 \pm \frac{1}{\omega_0} \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi', \quad \text{soit} \quad \phi = \phi_0 \pm \omega_0(t - t_0) = \pm \omega_0 t + \phi'_0$$

On en déduit la solution générale  $x = A \cos(\omega_0 t + \phi_0'')$ ,  $A$  et  $\phi_0''$  étant deux constantes d'intégration ajustables aux conditions initiales  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , ce qui conduit à  $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$ . On a  $E = E(0) = \frac{1}{2} k x_0^2$ .

• **Remarque** Une méthode de résolution plus directe de l'équation différentielle part de la constatation que les variables  $X = x \sqrt{\frac{k}{2E}}$ ,  $V = \dot{x} \sqrt{\frac{m}{2E}}$ , vérifient  $X^2 + V^2 = 1$  et représentent, dans un plan fictif, les coordonnées d'un point situé sur un cercle de rayon 1 ayant pour centre l'origine. On est ainsi amené à écrire  $X = \cos \theta$ ,  $V = \sin \theta$ . Mais  $\dot{X} = -\dot{\theta} \sin \theta = -\dot{\theta} V$ , soit  $\dot{x} \sqrt{\frac{k}{2E}} = -\dot{\theta} \dot{x} \sqrt{\frac{m}{2E}}$ , d'où l'on tire  $\dot{\theta} = -\omega_0$  et par suite  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0'')$ .

**III - Fusée 1°)** On se place dans le référentiel terrestre, lequel est assimilable à un référentiel galiléen pendant une durée limitée. Soit  $\vec{P}$  la quantité de mouvement de l'ensemble fusée+gaz,  $\vec{p}$  la quantité de mouvement de la fusée (sans les gaz). Si  $dm$  est la masse de gaz libérée entre  $t$  et  $t + dt$ , la quantité de mouvement totale à la date  $t + dt$  est

$$\begin{aligned} \vec{P}(t + dt) &= \vec{p}(t + dt) - dm(\vec{v} + \vec{w}), \quad \text{et l'on a} \\ \vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) &= m \vec{g} dt = d\vec{p} - dm(\vec{v} + \vec{w}) \quad \text{d'où} \\ d\vec{p} &= m \vec{g} dt + dm(\vec{v} + \vec{w}) = d(m \vec{v}) = dm \vec{v} + m d\vec{v}, \quad \text{soit} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{g} + \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} \vec{w} \end{aligned}$$

2°) a)  $dt = -dm/\rho$ , d'où  $\frac{d\vec{v}}{dm} = -\frac{1}{\rho} \vec{g} + \frac{1}{m} \vec{w}$ , puis  $\vec{v} = \vec{e}_z \frac{dz}{dt} = -\rho \vec{e}_z \frac{dz}{dm}$ . On en déduit

$$\frac{d^2 z}{dm^2} = -\frac{g}{\rho^2} + \frac{w}{m\rho}$$

b) Par intégrations successives et en tenant compte des conditions initiales  $m(0) = m_0$ ,  $\dot{z}(0) = 0$ ,  $z(0) = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dm} &= -\frac{g}{\rho^2}(m - m_0) + \frac{w}{\rho} \ln \frac{m}{m_0} \\ z &= -\frac{g}{\rho^2}(m - m_0)^2 + \frac{w}{\rho} \left[ m \ln \frac{m}{m_0} - (m - m_0) \right] \end{aligned}$$

c) On a  $\dot{z}(0) = 0$ ; pour avoir  $\dot{z}(\epsilon) > 0$ , il faut  $\ddot{z}(0) > 0$ , soit

$$\rho w > m_0 g$$

c'est-à-dire,  $F = \rho w$ , qui est une force de poussée, doit être plus grande que le poids initial de la fusée.

3°) A.N. :  $w \simeq 2500 \text{ m/s}$ ,  $\dot{z}(150) \simeq 1650 \text{ m/s}$ ,  $z(150) \simeq 75 \text{ km}$ .

#### IV- Pendule simple

1°)  $\vec{e}_\rho = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$  ;

$v_\rho = 0$ ,  $v_\theta = \ell \dot{\theta}$ ,  $a_\rho = -\ell \dot{\theta}^2$ ,  $a_\theta = \ell \ddot{\theta}$ .

2°)  $m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T}$ , avec  $\vec{T} = T \vec{e}_\rho$ ,  $\vec{g} = g \vec{e}_x$  (verticale descendante). D'où

$$\ell \dot{\theta}^2 = -g \cos \theta - T/m, \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta \quad (1)$$

3°)  $E = E_c + E_p$ , avec  $E_c = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2$ ,  $E_p = -m g y + \text{constante}$ ,  $y = \ell \cos \theta$ , d'où

$$E = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 - m g \ell \cos \theta = \text{constante} = -m g \ell \cos \theta_0, \quad \text{soit}$$

$$\ell \dot{\theta}^2 = 2 g (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (2)$$

4°) a) D'après (2),  $\cos \theta - \cos \theta_0 \geq 0$  et donc  $|\theta| \leq \theta_0$  (on prend  $\theta_0 \geq 0$ ). Considérons le cas  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ . A  $t = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ . D'après (1) on a à ce moment  $\ddot{\theta} < 0$  et ultérieurement  $\dot{\theta}$  va donc décroître et donc devenir négatif. L'angle  $\theta$  va aussi décroître, passer par la valeur 0 et devenir négatif. L'accélération  $\ddot{\theta}$  s'annule pour  $\theta = 0$  puis devient positive pour  $\theta < 0$  ;  $\dot{\theta}$  devient croissant et comme cette vitesse était négative, elle revient vers 0 et atteint cette valeur pour  $\theta = -\theta_0$ . Puis elle redevient positive. L'angle  $\theta$  qui était à la valeur  $-\theta_0$  devient croissant et revient donc vers la valeur 0, etc. Le mouvement est donc périodique. La période est 4 fois le temps que le pendule prend pour passer de la position  $\theta = 0$  à la position  $\theta_0$ . Dans cette phase, on a  $\dot{\theta} > 0$ . et donc

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}} \quad \text{d'où} \quad \tau = \frac{4}{\omega} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

b)  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ,  $\cos \alpha \geq 0$ ,  $\cos \theta - \cos \theta_0 = 2 \left( \sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = 2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \cos^2 \alpha$

$d\theta \cos \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \alpha d\alpha$  et  $d\theta = 2 \sin \frac{\theta_0}{2} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \alpha}}$ , d'où

$$\tau = \frac{4}{\omega} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \alpha}}$$

c)  $\tau \simeq \frac{4}{\omega} \int_0^{\pi/2} d\alpha \left[ 1 + \frac{\theta_0^2}{2} \sin^2 \alpha \right] = \frac{2\pi}{\omega} \left( 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$  (formule de Borda).

$$p = \frac{\Delta\tau}{\tau_0} = \frac{\theta_0^2}{16}; p \leq 10^{-2} \text{ pour } \theta_0 \leq 0,4 \text{ rd} = 23^\circ; p \leq 10^{-4} \text{ pour } \theta_0 \leq 0,04 \text{ rd} = 2,3^\circ.$$

5°)  $a_N = -a_\rho = \ell \dot{\theta}^2$  et  $T = T_\rho = -m[a_N + g \cos \theta] = -mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$ . La tension  $-T_\rho$  varie entre une valeur minimum  $mg \cos \theta_0$  ( $\theta = \pm \theta_0$ ) et une valeur maximum  $mg(3 - 2 \cos \theta_0)$  ( $\theta = 0$ ).

### V- Influence du Soleil

$$1^\circ) M_T \vec{\gamma}_{T/S} = -\omega^2 \vec{SO} = -\frac{GM_T M_S}{SO^3} \vec{SO}, \text{ d'où } \omega^2 = \frac{GM_S}{D^3}.$$

$$2^\circ) \vec{\gamma}_{M/S} = \vec{\gamma}_{M/T} + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c, \text{ avec}$$

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}_{T/S} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}), \quad \vec{\gamma}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/T},$$

$$\text{et } \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = -\omega^2(x \vec{e}_x + y \vec{e}_y)$$

$$\text{Or, } \vec{\gamma}_{M/S} = -\frac{GM_S}{SM^3} \vec{SM} - \frac{GM_T}{OM^3} \vec{OM}, \text{ d'où}$$

$$\vec{\gamma}_{M/T} = \vec{\gamma}_{M/S} - \vec{\gamma}_e - \vec{\gamma}_c = -\frac{GM_S}{SM^3} \vec{SM} - \frac{GM_T}{OM^3} \vec{OM} + \omega^2 \vec{SO} + \omega^2(x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) - \vec{\gamma}_c$$

à l'équilibre dans le référentiel terrestre ( $\vec{v}_{M/T} = \vec{0}$ ), ceci correspond à la force par unité de masse :

$$\vec{f} = -\frac{GM_S}{SM^3} \vec{SM} - \frac{GM_T}{OM^3} \vec{OM} - \omega^2 \vec{OS} + \omega^2(x \vec{e}_x + y \vec{e}_y)$$

Cette force ne dépend que des coordonnées  $(x, y, z)$  de  $M$  dans le référentiel terrestre et l'on a  $\vec{f} = -\text{grad } V$  où  $V$  est le potentiel

$$V(x, y, z) = -\frac{GM_S}{SM} - \frac{GM_T}{OM} + \omega^2 D y - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

$$3^\circ) \text{ On a } SM = D \sqrt{1 + \frac{OM^2}{D^2} - \frac{2y}{D}} \text{ et } \frac{1}{SM} \simeq \frac{1}{D} \left[ 1 + \frac{y}{D} + \frac{1}{2D^2} \{2y^2 - x^2 - z^2\} \right],$$

d'où

$$V(x, y, z) \simeq -\frac{GM_S}{D} - \frac{GM_T}{OM} + \frac{\omega^2}{2} (z^2 - 3y^2)$$

$$4^\circ) \frac{1}{OM} = \frac{1}{R_T + \Delta r} \simeq \frac{1}{R_T} - \frac{\Delta r}{R_T^2} \text{ et } V(x, y, z) \simeq -\frac{GM_S}{D} - \frac{GM_T}{R_T} + g \Delta r + \frac{\omega^2}{2} (z^2 - 3y^2).$$

D'où, si  $V = V_0$  :

$$\Delta r \simeq \frac{\omega^2}{2g}(3y^2 - z^2) + A, \text{ avec } A = \left[ V_0 + \frac{GM_S}{D} + \frac{GM_T}{R_T} \right] / g$$

5°) a)  $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 \simeq R_T^2 + 2R_T\Delta r = R_T^2 + 2R_T \left[ A + \frac{\omega^2}{2g}(3y^2 - z^2) \right]$ , d'où l'équation

$$x^2 + y^2 \left( 1 - \frac{3\omega^2 R_T}{g} \right) + z^2 \left( 1 + \frac{\omega^2 R_T}{g} \right) = R_T^2 \left( 1 + \frac{2A}{R_T} \right)$$

laquelle représente dans le plan  $x = 0$  l'équation d'une ellipse dont les axes ont pour longueurs

$$a = R_T \sqrt{\frac{1 + \frac{2A}{R_T}}{1 - \frac{3\omega^2 R_T}{g}}}, \quad b = R_T \sqrt{\frac{1 + \frac{2A}{R_T}}{1 + \frac{\omega^2 R_T}{g}}}$$

b)  $a \simeq R_T \left[ 1 + \frac{A}{R_T} + \frac{3\omega^2 R_T}{2g} \right]$ ,  $b \simeq R_T \left[ 1 + \frac{A}{R_T} - \frac{\omega^2 R_T}{2g} \right]$ ,  $|a - b| \simeq \frac{2\omega^2 R_T}{g}$

A.N. :  $|a - b| \simeq 32,5 \text{ cm}$ .

### Exercices n° 3

#### - Equilibres de forces - Principe de d'Alembert

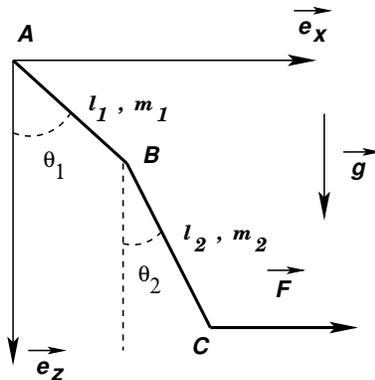
**I** - Une échelle simple de masse  $M$ , de longueur  $2L$  s'appuie avec frottement sur un sol horizontal et sur un mur vertical. Elle fait un angle  $\beta$  avec le mur. On admettra que les réactions du mur et du sol satisfont à la *loi de Coulomb et Morin*. Selon cette loi, au point de contact de deux corps  $C_1$  et  $C_2$ , la force de réaction  $\vec{R}$  de  $C_2$  sur  $C_1$  fait avec la normale commune aux deux surfaces de  $C_1$  et  $C_2$  un angle  $\alpha$  au plus égal à un angle  $\phi$ , appelé angle de frottement, qui ne dépend que de la nature des corps en contact et de l'état de rugosité des surfaces. Il ne peut y avoir équilibre si  $\alpha > \phi$ . Si  $N$  et  $T$  sont, respectivement, les composantes normale et tangentielle de  $\vec{R}$  relativement au plan tangent aux surfaces, l'équilibre ne peut donc être réalisé que si

$$\frac{T}{N} \leq f = \tan \phi$$

où  $f$  est le coefficient de frottement solide. Les coefficients de frottement du mur et du sol sont supposés identiques et seront notés  $f$ .

Trouver, pour l'échelle, l'angle limite  $\beta_\ell$  au delà duquel elle ne peut plus être en équilibre. A.N :  $f = 0,5$ .

#### **II** - Pendule double à l'équilibre



On considère un ensemble de deux tiges fines  $AB$  et  $BC$  rigides et inextensibles, faites d'un même matériau homogène, et dont les masses et les longueurs sont, respectivement,  $m_1$  et  $l_1$  pour  $AB$ ,  $m_2$  et  $l_2$  pour  $BC$ . Ces deux tiges s'articulent l'une à l'autre en une extrémité

commune  $B$ . L'extrémité  $A$  de la première est fixée dans un plan horizontal. Un opérateur exerce sur l'extrémité  $C$  de la seconde une force horizontale constante  $\vec{F} = F \vec{e}_x$ . On note  $\vec{g} = g \vec{e}_z$  l'accélération de la pesanteur ( $\vec{e}_z$  selon la verticale descendante et  $g > 0$ ). A l'équilibre, les deux tiges sont dans un même plan vertical contenant  $\vec{F}$  et font, avec la verticale descendante, les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  respectivement. Les frottements sont négligeables.

1°) Trouver  $\theta_1$  et  $\theta_2$  en fonction des données, en appliquant le principe des travaux virtuels.

2°) Que deviennent ces expressions si  $m_1 \ll m_2$ ? Interpréter le résultat.

**III** - Une chaînette est modélisée comme une succession de  $n$  éléments solides linéaires (maillons) identiques de longueur  $\ell$  et de masse  $m$ , s'articulant les uns à la suite des autres par leurs extrémités. L'une des extrémités  $O$  de la chaînette est fixée à un mur vertical. Un opérateur exerce sur l'autre extrémité  $E$  une force horizontale constante  $\vec{F} = F \vec{e}_x$ .

1°) A l'équilibre, le  $p^{\text{ème}}$  maillon de la chaînette fait un angle  $\alpha_p$  avec la direction  $Ox$ . En appliquant le principe de d'Alembert, montrer que

$$\tan \alpha_p = \frac{mg}{F} \left( n - p + \frac{1}{2} \right)$$

$g$  étant l'accélération de la pesanteur. On considèrera en premier lieu les cas  $n = 2$  et  $n = 3$ , puis on généralisera.

2°) Exprimer  $\tan \alpha_p$  en fonction : de la longueur totale  $L$  de la chaînette, de la densité linéique de masse de la chaînette définie par  $\mu = m/\ell$ , et de la distance  $s = (p - \frac{1}{2})\ell$ , comptée le long de la chaînette, entre le point  $O$  et le centre du  $p^{\text{ème}}$  maillon.

3°) On suppose maintenant que le nombre de maillons de la chaînette est très grand, à la limite infini, la longueur  $L$  ainsi que la densité de masse  $\mu$  restant toutefois finies. On veut déterminer le profil  $z(x)$  que prend la chaînette "continue" ainsi constituée, soumise aux contraintes définies précédemment,  $z$  étant ici défini selon la verticale descendante à partir de  $O$  pris comme origine.

a) Montrer qu'en un point  $M(x, z)$  de la chaînette on a

$$\frac{dz}{dx} = k(L - s)$$

où  $s$  est l'abscisse curviligne de  $M$  par rapport à  $O$  le long de la chaînette, et  $k = \frac{\mu g}{F}$ .

b) Montrer que

$$\left( \frac{dz}{dx} \right)^2 = \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 - 1$$

c) En posant  $L - s = u = \frac{1}{k} \sinh \Psi$ , montrer, à l'aide des précédentes relations, que

$$\Psi = -kx + \Psi_0$$

où  $\Psi_0$  est une constante que l'on déterminera en fonction des données.

4°) Démontrer enfin que l'on a

$$z(x) = \frac{1}{k} [ \cosh \Psi_0 - \cosh (\Psi_0 - kx) ]$$

**IV** - Deux petites masses assimilables à des points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de masses  $m_1$  et  $m_2$  respectivement sont reliées par un fil souple mais inextensible de longueur  $L$ . L'ensemble est disposé sur une boule solide de centre  $O$  et de rayon  $R > L/\pi$ , de telle sorte que le fil de liaison soit tendu en épousant sur toute sa longueur la forme d'un arc de grand cercle de la boule, dans un plan vertical  $\mathcal{P}$ . Les deux objets étant en équilibre, on note  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les angles que font les vecteurs  $\overrightarrow{OM_1}$  et  $\overrightarrow{OM_2}$  respectivement avec l'horizontale. Toute cause de frottement est négligée.

1°) a) A partir du principe des travaux virtuels, trouver la condition d'équilibre du système des deux masses sur la boule et l'exprimer à l'aide des angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

b) Trouver une représentation géométrique de la condition d'équilibre en traçant dans le plan vertical  $\mathcal{P}$  deux cercles de centre  $O$  et de rayons  $m_1$  et  $m_2$  respectivement. On suppose  $m_1 > m_2$ . Montrer alors que l'équilibre n'est réalisable que pour certaines valeurs de  $\theta_1$ .

2°) Trouver ensuite  $\theta_1$  en fonction des données  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $R$  et  $L$ . Etudier les cas  $L = 2\pi R/3$ ,  $m_1 = m_2$ ,  $m_1 = 2m_2$ ,  $m_1 = 4m_2$ . Que devient la condition d'équilibre si l'objet  $M_2$  n'est plus en contact avec la boule (une partie du fil soutenant  $M_2$  étant alors selon la verticale) ?

3°) Interpréter le résultat obtenu au 1°) a) en termes de forces. L'équilibre est-il stable ou instable ?

## V - Poulies et masses

On considère le système schématisé par la figure 1. Le système, parallèle au plan  $xOz$ , est symétrique par rapport à la verticale descendante  $Oz$ . Il comporte deux poulies identiques de rayon  $R$ , et de centres respectifs  $A_1$  et  $A_2$  situés à la même cote et distants de  $A_1A_2 = 2d$ . Sur chacune des poulies est enroulé un fil inextensible de longueur  $L$  dont l'une des extrémités est relié à une masse  $m$  suspendue à la verticale, tandis que l'autre est reliée en un point  $P$  à l'extrémité similaire du fil de la seconde poulie. Le point  $P$  est lui-même relié à une masse  $M$ . On cherche à déterminer l'angle  $\theta$  pour lequel le système est à l'équilibre. On admettra que la tension d'un fil garde la même norme tout le long du fil tout en changeant éventuellement de direction.

1°) Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point  $P$  à l'équilibre et trouver l'angle  $\theta_0$  correspondant. A quelle condition l'équilibre est-il réalisable ?

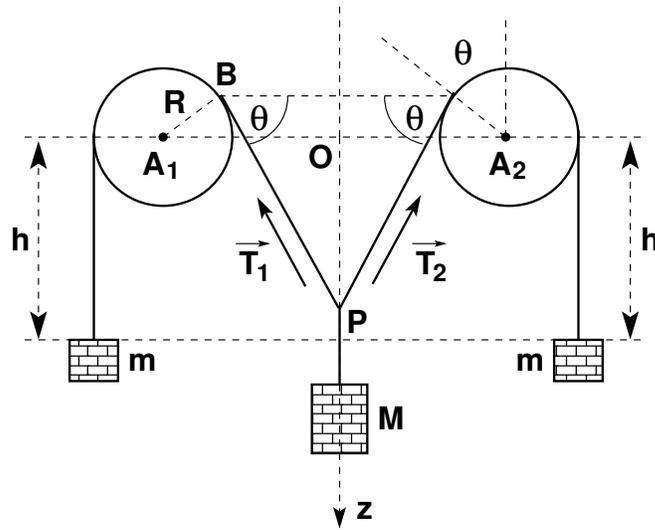


Figure 1

2°) On cherche maintenant à déterminer  $\theta_0$  en appliquant le principe des travaux virtuels. Exprimer ce principe en introduisant des variations infinitésimales  $dh$  et  $dz$  où  $z = \overline{OP}$ .

3°) Pour exploiter l'équation obtenue, il faut connaître la relation entre  $dh$  et  $dz$ .

a) Quelle relation existe-t-il entre  $h$ ,  $\theta$  et  $BP$ ? En déduire une relation entre  $\frac{dh}{d\theta}$  et  $\frac{dBP}{d\theta}$ .

b) A l'aide du schéma de la figure 2, montrer que  $R + \frac{dBP}{d\theta} = \sin \theta \frac{dz}{d\theta}$ .

c) En déduire que  $\frac{dh}{dz} = -\sin \theta$ . En reportant cette dernière relation dans l'équation du principe des travaux virtuels, retrouver la condition d'équilibre du 1°).

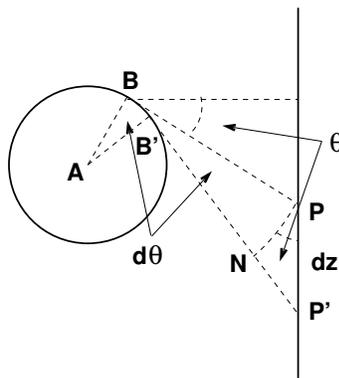
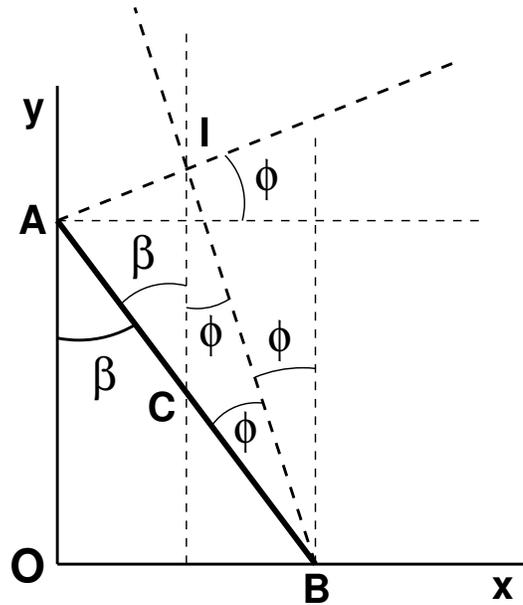


Figure 2

Solutions n° 3

**I - Echelle**



En examinant la figure ci-dessus, on remarque que dans la situation limite où  $\alpha = \phi$  à la fois au point  $A$  et au point  $B$  de l'échelle, les droites  $AI$  et  $BI$  sont perpendiculaires et que les points  $A$ ,  $I$  et  $B$  sont alors sur le même cercle dont le centre  $C$  est le milieu de l'échelle. Le triangle  $CIB$  étant isocèle,  $\widehat{CBI} = \widehat{CIB} = \phi$ , et par suite,  $\beta = 2\phi$  (angle extérieur au triangle  $ICB$ ).

Ecrivons les conditions d'équilibre :  $\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$ ,  $\vec{CA} \wedge \vec{R}_A + \vec{CB} \wedge \vec{R}_B = \vec{0}$  et projetons-les sur les axes  $Ox$  et  $Oy$  :

$$N_B - T_A = 0, \quad T_B + N_A - Mg = 0, \quad -\sin \beta (T_B - N_A) - \cos \beta (N_B - T_A) = 0$$

d'où l'on tire (dans la situation limite) :  $T_A = N_B = fN_A$ ,  $fN_B + N_A = Mg$ , soit  $N_A = \frac{Mg}{1+f^2}$  ; puis  $\sin \beta N_A(1-f^2) = \cos \beta N_A(2f)$ , c'est-à-dire,

$$\tan \beta_\ell = \frac{2f}{1-f^2} = \tan 2\phi, \quad \beta_\ell \simeq 53^\circ$$

## II - Pendule double à l'équilibre

Soit  $G_1$  le centre de gravité de la tige  $AB$ ,  $G_2$  celui de la barre  $BC$ . On a  $\vec{AG}_1 = \vec{\ell}_1 / 2$ ,  $\vec{AG}_2 = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 / 2$ ,  $\vec{AC} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2$ , avec  $\vec{\ell}_i = \ell_i [\sin \theta_i \vec{e}_x + \cos \theta_i \vec{e}_z]$ . Le principe des travaux virtuels donne

$$\begin{aligned} \vec{m}_1 \vec{g} \cdot \delta \vec{AG}_1 + \vec{m}_2 \vec{g} \cdot \delta \vec{AG}_2 + \vec{F} \cdot \delta \vec{AC} &= 0, \quad \text{ou} \\ \vec{m}_1 \vec{g} \cdot \delta \vec{\ell}_1 / 2 + \vec{m}_2 \vec{g} \cdot \left[ \delta \vec{\ell}_1 + \frac{1}{2} \delta \vec{\ell}_2 \right] + \vec{F} \cdot \left[ \delta \vec{\ell}_1 + \delta \vec{\ell}_2 \right] &= \\ \delta \vec{\ell}_1 \cdot \left[ \left( m_2 + \frac{m_1}{2} \right) \vec{g} + \vec{F} \right] + \delta \vec{\ell}_2 \cdot \left[ \frac{1}{2} m_2 \vec{g} + \vec{F} \right] &= 0, \quad \text{soit} \\ \ell_1 \delta \theta_1 \left[ -g \left( m_2 + \frac{m_1}{2} \right) \sin \theta_1 + F \cos \theta_1 \right] + \ell_2 \delta \theta_2 \left[ -\frac{1}{2} m_2 g \sin \theta_2 + F \cos \theta_2 \right] &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit  $\tan \theta_1 = \frac{2F}{g(m_1 + 2m_2)}$ ,  $\tan \theta_2 = \frac{2F}{m_2 g}$ .

### Remarque

Ce résultat peut être obtenu aussi bien en appliquant le théorème du moment cinétique. Appelons  $\vec{R}$  la force de liaison du système des deux pendules s'appliquant au point  $A$ . A l'équilibre, on a bien sûr  $\vec{R} = -(m_1 + m_2) \vec{g} - \vec{F}$ . Considérons le système tige  $BC$  sur lequel s'applique les forces extérieures :  $m_2 \vec{g}$  en  $G_2$ ,  $\vec{F}$  en  $C$  et une force de liaison en  $B$ . Pour éliminer cette dernière de l'équation, on applique ledit théorème au point  $B$ , ce qui donne

$$\vec{BG}_2 \wedge \vec{m}_2 \vec{g} + \vec{BC} \wedge \vec{F} = \vec{0} = \vec{e}_y \ell_2 \left[ -\frac{1}{2} m_2 g \sin \theta_2 + \cos \theta_2 F \right], \quad \text{d'où} \quad \tan \theta_2 = \frac{2F}{m_2 g}$$

Considérons ensuite la tige  $AB$  et appliquons le théorème au point  $B$ . On obtient

$$\begin{aligned} \vec{BA} \wedge \vec{R} + \vec{BG}_1 \wedge \vec{m}_1 \vec{g} &= \vec{0} = \vec{BG}_1 \wedge \vec{m}_1 \vec{g} + \vec{AB} \wedge \left[ \vec{m}_1 \vec{g} + \vec{m}_2 \vec{g} + \vec{F} \right] \\ &= \vec{AG}_1 \wedge \vec{m}_1 \vec{g} + \vec{AB} \wedge \vec{m}_2 \vec{g} + \vec{AB} \wedge \vec{F} \\ &= \vec{e}_y \ell_1 \left[ -g \left( m_2 + \frac{m_1}{2} \right) \sin \theta_1 + \cos \theta_1 F \right], \quad \text{d'où} \quad \tan \theta_1 = \frac{2F}{g(m_1 + 2m_2)} \end{aligned}$$

Lorsque  $m_2 \gg m_1$ ,  $\tan \theta_1 \simeq \frac{F}{m_2 g}$ , ce qui signifie que la résultante  $\vec{T} = \vec{m}_2 \vec{g} + \vec{F}$  est alors quasiment orientée selon  $\vec{AB}$ . Le poids  $\vec{m}_1 \vec{g}$  de la tige étant négligeable devant le poids  $\vec{m}_2 \vec{g}$ , la force de réaction  $\vec{R}$  devient quasiment égale à  $-\vec{T}$ .

### III - Chaînette

1°) Pour le  $p$ ème maillon on note :  $P_{p-1}$  et  $P_p$  ses extrémités, avec  $P_0 = O$ ,  $P_n = E$ ;  $C_p$  son milieu;  $\vec{\ell}_p = P_{p-1}P_p = \cos \alpha_p \vec{e}_x + \sin \alpha_p \vec{e}_z$ . Le poids de chaque maillon s'applique au milieu de celui-ci, la force  $\vec{F}$  s'applique en  $P_n$ . On a

$$\vec{OC}_1 = \frac{\vec{\ell}_1}{2}, \quad \vec{OC}_2 = \vec{\ell}_1 + \frac{\vec{\ell}_2}{2}, \quad \vec{OC}_3 = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \frac{\vec{\ell}_3}{2}, \quad \dots, \quad \vec{OC}_p = \sum_{k=1}^{p-1} \vec{\ell}_k + \frac{\vec{\ell}_p}{2}$$

$$\sum_{p=1}^n \vec{OC}_p = (n-1 + \frac{1}{2})\vec{\ell}_1 + (n-2 + \frac{1}{2})\vec{\ell}_2 + \dots + (n-p + \frac{1}{2})\vec{\ell}_p + \dots + \frac{\vec{\ell}_n}{2}$$

$$\vec{OP}_n = \sum_{p=1}^n \vec{\ell}_p, \quad \delta \vec{\ell}_p = \delta \alpha_p (-\sin \alpha_p \vec{e}_x + \cos \alpha_p \vec{e}_z)$$

D'après le principe de d'Alembert, pour des déplacements infinitésimaux virtuels quelconques  $\delta \vec{OM}_k$  des points d'un système à partir d'une position d'équilibre, on a  $\sum_k \vec{F}_k^{\text{ext}} \cdot \delta \vec{OM}_k = 0$

(les forces de contraintes ne travaillent pas). Appliqué à la chaînette, il donne

$$m \vec{g} \cdot \delta \left( \sum_{p=1}^n \vec{OC}_p \right) + \vec{F} \cdot \delta \vec{OP}_n = 0, \quad \text{soit}$$

$$\sum_{p=1}^n \left[ mg \left( n - p + \frac{1}{2} \right) \cos \alpha_p - F \sin \alpha_p \right] \delta \alpha_p = 0$$

les variations  $\delta \alpha_p$  étant indépendantes, on aboutit à

$$\tan \alpha_p = \frac{mg}{F} \left( n - p + \frac{1}{2} \right)$$

2°)  $\tan \alpha_p = \frac{\mu g}{F} (L - s)$ .

3°) a)  $\tan \alpha = \frac{dz}{dx} = k(l - s)$ , avec  $k = \frac{\mu g}{F}$ .

b)  $ds^2 = dx^2 + dz^2$ , donc  $\left( \frac{dz}{dx} \right)^2 = \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 - 1$ .

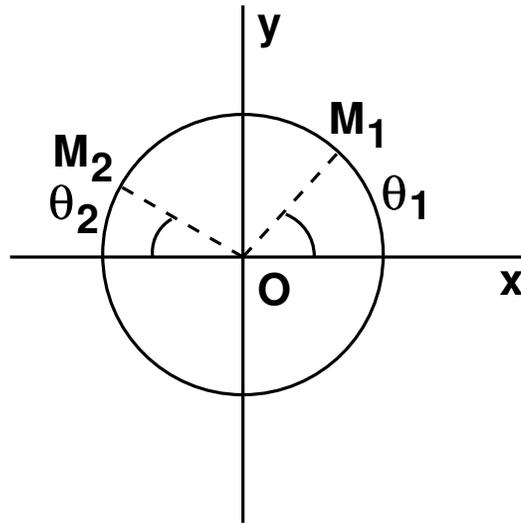
c)  $\left( \frac{du}{dx} \right)^2 = 1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2 = 1 + k^2 u^2 = 1 + \sinh^2 \Psi = \cosh^2 \Psi$ . Mais  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{k} \cosh \Psi \frac{d\Psi}{dx}$ , d'où  $\left| \frac{d\Psi}{dx} \right| = k$ . Or  $\frac{du}{dx} = -\frac{ds}{dx} < 0$ , donc  $\frac{d\Psi}{dx} = -k$  et  $\Psi = -kx + \Psi_0$ . Ainsi  $L - s = \frac{1}{k} \sinh(-kx + \Psi_0)$ . Or, pour  $x = 0$ , on a  $s = 0$ , donc  $\sinh \Psi_0 = kL$ . Finalement,

$$\frac{dz}{dx} = \sinh \Psi = \sinh(-kx + \Psi_0)$$

4°) En intégrant  $dz/dx$ , on obtient  $z = -\frac{1}{k} \cosh(-kx + \Psi_0) + \text{constante}$ , et comme  $z(0) = 0$ , on obtient finalement

$$z(x) = \frac{1}{k} (\cosh \Psi_0 - \cosh(kx - \Psi_0))$$

#### IV - Petites masses



1°) a)  $\vec{OM}_1 = R (\cos \theta_1 \vec{e}_x + \sin \theta_1 \vec{e}_y)$ ,  $\vec{OM}_2 = R (-\cos \theta_2 \vec{e}_x + \sin \theta_2 \vec{e}_y)$ ;

$$\frac{L}{R} = \pi - \theta_1 - \theta_2;$$

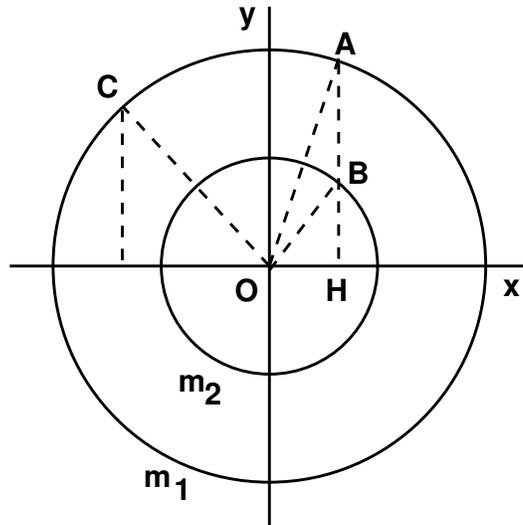
$$\delta \vec{M}_1 = R \delta \theta_1 (-\sin \theta_1 \vec{e}_x + \cos \theta_1 \vec{e}_y), \quad \delta \vec{M}_2 = R \delta \theta_2 (\sin \theta_2 \vec{e}_x + \cos \theta_2 \vec{e}_y).$$

L'application du principe de d'Alembert donne  $m_1 \vec{g} \cdot \delta \vec{M}_1 + m_2 \vec{g} \cdot \delta \vec{M}_2 = 0$ , soit, avec  $\delta \theta_2 = -\delta \theta_1$ ,  $R \delta \theta_1 g (-m_1 \cos \theta_1 + m_2 \cos \theta_2) = 0$ , donc

$$m_1 \cos \theta_1 = m_2 \cos \theta_2$$

b) Si  $m_1 > m_2$ , la relation précédente ne peut être réalisée que si  $\cos \theta_2 = \frac{m_1}{m_2} \cos \theta_1 \leq 1$ , ce qui impose la restriction

$$\cos \theta_1 \leq \frac{m_2}{m_1}$$



b) Dans la figure ci-dessus : à partir de  $O$  on trace la droite faisant l'angle  $\theta_1$  avec  $Ox$ , coupant le cercle  $(O, m_1)$  en  $A$ . Puis à partir de  $A$  on trace la perpendiculaire à  $Ox$ . Cette dernière coupe le cercle  $(O, m_2)$  en un point  $B$  si  $\theta_1$  est inférieur à un certain angle limite. Dans la construction de droite, ce point  $B$  existe. Dans la construction de gauche, il n'existe pas. La valeur limite de  $\theta_1$  correspond au cas où  $AH$  est tangent au cercle  $(O, m_2)$ ;  $B$  et  $H$  sont alors confondus, et  $OH = m_2$ . Si  $B$  existe, l'angle  $\theta$  entre  $OB$  et  $Ox$  est bien  $\theta_2$  puisque  $OH = m_1 \cos \theta_1 = m_2 \cos \theta_2 = m_2 \cos \theta$ .

2°) On a  $\cos \theta_2 = \cos(\pi - \theta_1 - L/R) = -\cos(\theta_1 + L/R) = -\cos \theta_1 \cos(L/R) + \sin \theta_1 \sin(L/R) = (m_1/m_2) \cos \theta_1$ , d'où

$$\tan \theta_1 = \frac{\frac{m_1}{m_2} + \cos \frac{L}{R}}{\sin \frac{L}{R}}$$

$L = 2\pi/3$ ;  $\cos(L/R) = -1/2$ ;  $\sin(L/R) = \sqrt{3}/2$ ;

- $m_1 = m_2$ ; alors  $\tan \theta_1 = \sqrt{3}$  et  $\theta_1 = \pi/3$ .
- $m_1 = 4m_2$ ; alors  $\tan \theta_1 = 7/\sqrt{3}$  et  $\theta_1 \simeq 70^\circ$ .

De façon évidente,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  varient en sens inverses ( $\frac{L}{R} = \pi - \theta_1 - \theta_2$ ). Si  $\theta_1$  augmente,  $\cos \theta_1$  diminue, mais puisqu'alors  $\theta_2$  diminue,  $\cos \theta_2$  augmente. Ces deux cosinus ayant des variations opposées, un déséquilibre dans la relation  $m_1 \cos \theta_1 = m_2 \cos \theta_2$  ne peut que s'accroître. L'équilibre est donc instable.

Si l'objet  $M_2$  n'est plus en contact avec la boule, un équilibre n'est possible que si  $m_1 \cos \theta_1 = m_2$ . Si  $m_2 > m_1$  un tel équilibre est impossible.

3°) Les deux masses étant reliées par un fil inextensible sont chacune soumise à une force de tension dont la direction est dans le plan tangent à la boule, soit  $\vec{T}_1 = T_1 \vec{e}_{\theta_1}$  et  $\vec{T}_2 = T_2 \vec{e}_{\theta_2}$  respectivement. A l'équilibre, chacune compense la partie orthoradiale du poids de la masse correspondante, soit  $T_1 = m_1 g \cos \theta_1$ ,  $T_2 = m_2 g \cos \theta_2$ , et on doit avoir  $T_1 = T_2$ , d'où la condition d'équilibre. Si  $m_1 \cos \theta_1 \neq m_2 \cos \theta_2$ , on ne peut plus satisfaire  $T_1 = T_2$ .

### Remarque

Ces conclusions peuvent être bien sûr établies en étudiant l'énergie potentielle de pesanteur  $U$  de l'ensemble des deux masses, tenant compte des contraintes. On a

$$U = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$$

$z_1$  et  $z_2$  étant les cotes respectives de  $M_1$  et  $M_2$ , comptées à partir de l'axe  $Ox$ .

• Lorsque les deux masses sont sur la boule,  $z_1 = R \sin \theta_1$ ,  $z_2 = R \sin \theta_2$ , avec  $\theta_2 = \pi - \theta_1 - L/R$ . L'énergie potentielle est alors une fonction de la seule variable  $\theta_1$  :

$$U(\theta_1) = m_1 g R \sin \theta_1 + m_2 g R \sin \theta_2$$

Compte tenu de  $d\theta_2 = -d\theta_1$ , on a

$$\frac{dU}{d\theta_1} = gR (m_1 \cos \theta_1 - m_2 \cos \theta_2), \quad \frac{d^2U}{d\theta_1^2} = -gR (m_1 \sin \theta_1 + m_2 \sin \theta_2) \leq 0$$

L'équilibre éventuel correspondant à l'annulation de la dérivée première de  $U(\theta_1)$ , on obtient l'équation qui le caractérise, soit  $m_1 \cos \theta_1 = m_2 \cos \theta_2$ ; mais on voit que la dérivée seconde est toujours négative, d'où la conclusion que cet équilibre est instable.

• Lorsque  $m_2$  n'est plus en contact avec la boule tandis que  $m_1$  le reste :

$$U(\theta_1) = m_2 g z + m_1 g R \sin \theta_1, \quad \text{avec } z = R(\pi - \theta_1) - L \leq 0 \quad \text{et}$$

$$\frac{dU}{d\theta_1} = gR (m_1 \cos \theta_1 - m_2), \quad \frac{d^2U}{d\theta_1^2} = -gR m_1 \sin \theta_1 \leq 0$$

d'où l'équation  $m_2 = m_1 \sin \theta_1$  de l'équilibre ici encore instable.

#### IV - Poulies et masses

1°)  $\vec{T}_1 = -mg [\cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \vec{e}_x]$ ,  $\vec{T}_2 = mg [\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_z]$ ,  $\vec{P} = Mg \vec{e}_z$ . A l'équilibre,  $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = \vec{0} = g \vec{e}_z [M - 2m \sin \theta]$ , d'où  $\sin \theta_0 = \frac{M}{2m}$ .

2°)  $\sum_i \vec{F}_{i \text{ ext}} \cdot \vec{\delta r}_i = 0 = Mgdz + 2mgdh$ .

3°) a)  $h + R(\frac{\pi}{2} + \theta) + BP = L = \text{constante}$ , d'où  $\frac{dh}{d\theta} = -R - \frac{dBP}{d\theta}$ .

b)  $BP' - BP \simeq BB' + B'P' - BP = Rd\theta + dBP \simeq NP' = \sin \theta dz$ , d'où  $R + \frac{dBP}{d\theta} = \sin \theta \frac{dz}{d\theta}$ .

c) On en déduit  $\frac{dh}{dz} = -\sin \theta$  et en reportant cette dernière relation dans l'équation du principe des travaux virtuels, on trouve  $\sum_i \vec{F}_{i \text{ ext}} \cdot \vec{\delta r}_i = 0 = Mgdz - 2mgdz \sin \theta$ , d'où à l'équilibre (éventuel),  $\theta = \theta_0$  avec  $\sin \theta_0 = \frac{M}{2m}$ .

**Remarque** De façon un peu plus laborieuse, on peut établir la relation entre  $dh$  et  $dz$  comme suit. Il est facile d'établir les relations  $R + BP \cos \theta = d$ ,  $BP \sin \theta = z + R \cos \theta$ . En dérivant par rapport à  $\theta$ , on obtient

$$R + \frac{dBP}{d\theta} = BP \tan \theta = -\frac{dh}{d\theta}, \quad \left[ R + \frac{dBP}{d\theta} \right] \sin \theta = \frac{dz}{d\theta} - BP \cos \theta$$

Ainsi,  $\frac{dz}{d\theta} = BP(\cos \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}) = \frac{BP}{\cos \theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{dh}{d\theta}$ , d'où  $dh = -\sin \theta dz$ .

## Exercices n° 4

### - Lagrangiens I -

#### I - Le problème de Kepler

On étudie par la méthode de Lagrange le mouvement d'un corps  $S$  de masse  $m$  soumis au champ de pesanteur de la Terre. On fera les hypothèses suivantes.

- ♣ Le système Terre-corps peut être considéré comme isolé. Dans cette approximation, le référentiel  $\mathcal{R}$  du centre de masse de ce système est galiléen.
- ♣ Le centre de gravité  $O$  de la Terre peut être confondu avec le centre de masse  $C$  du système Terre-corps.
- ♣ Tout se passe pour  $S$  comme si la masse  $M$  de la Terre était concentrée en  $O$ .
- ♣ Le corps  $S$  peut être assimilé à un objet ponctuel.

Dans la suite, on étudie le mouvement de  $S$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  dont l'origine est en  $O$ .

1°) Montrer que la trajectoire de  $S$  est contenue dans un plan fixe  $\mathcal{P}$  contenant  $O$ .

2°) Compte-tenu de ce résultat, on prendra  $\mathcal{P}$  pour plan  $xOy$  et l'on y définira la position de  $S$  au moyen de ses coordonnées polaires  $r$  et  $\phi$ .

Définir pour  $S$  la fonction de Lagrange  $L(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi})$  où  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ ,  $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$ .

3°) Montrer que  $\phi$  est une variable cyclique et en déduire que la quantité  $r^2\dot{\phi}$  reste constante au cours du mouvement. Que représente cette quantité? On notera  $C = r^2\dot{\phi}$ .

4°) a) Définir l'énergie mécanique  $E$  de  $S$  et montrer qu'elle reste constante au cours du mouvement de  $S$ .

b) Exprimer  $E$  en fonction de  $u = \frac{1}{r}$  et  $u' = \frac{du}{d\phi}$ .

c) En déduire que  $u$  satisfait l'équation différentielle suivante

$$u'' + u = \frac{GM}{C^2}$$

où  $G$  est la constante de gravitation.

d) En déduire que  $r(\phi)$  est de la forme

$$r(\phi) = \frac{r_0}{1 + e \cos \phi}$$

$r_0$  et  $e$  étant deux constantes que l'on déterminera en fonction de  $C$ ,  $E$ ,  $M$  et  $G$ .

5°) Discuter la nature de la trajectoire de  $S$  suivant les valeurs de  $e$ .

## II - Mouvement contraint d'un anneau

Un point matériel  $M$  de masse  $m$ , matérialisé par un petit anneau, peut glisser sans frottement le long d'une tige horizontale  $OA$  de longueur  $L$  (la réaction de la tige sur l'anneau est perpendiculaire à la tige). Cette tige  $OA$  est animée d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire  $\omega$  autour de l'axe vertical  $\vec{Oz}$ . A la date  $t = 0$ , elle coïncide avec l'axe horizontal  $\vec{Ox}$ . A cette même date, l'anneau se trouve à la position  $OM_0 = a$ , sans vitesse initiale. On pose  $OM(t) = r$ .

1°) Trouver le Lagrangien  $\mathcal{L}(r, \dot{r})$  adapté à ce problème et en déduire l'équation différentielle du mouvement de l'anneau.

2°) Déterminer  $r(t)$ .

## III - Mouvement contraint d'une bille

Dans cet exercice, on étudie le mouvement contraint d'une bille, assimilée à un point matériel  $S$  de masse  $m$ , sur une surface de révolution  $\Sigma$ , d'axe (vertical)  $z'z$ . Le mouvement s'effectue sans frottement. La position de  $S$  sera repérée au moyen de ses coordonnées cylindriques  $r, \phi, z$ .

1°) Définir le lagrangien de  $S$  et l'exprimer uniquement en fonction de  $r, \dot{r}, \phi$  et  $\dot{\phi}$ , en tenant compte de la contrainte  $z = f(r)$ .

2°) Montrer que  $C = r^2 \dot{\phi}$  est une constante du mouvement.

3°) Définir l'énergie  $E$  de  $S$  et montrer qu'il s'agit d'une constante du mouvement.

4°) Exprimer  $\dot{r}$  puis  $\frac{dt}{dr}$  en fonction de  $r, E, C$  et  $m$ . Montrer alors que l'on peut obtenir sous forme implicite l'équation horaire du mouvement en exprimant  $t$  à l'aide d'une primitive d'une fonction de  $r$ .

5°) La surface  $\Sigma$  est un parabolôide d'équation  $z = ar^2$ ,  $a$  étant une constante positive. La bille est lancée depuis le point  $S_0(x = r_0 > 0, 0, z_0 = ar_0^2)$  avec la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$  ( $v_0 > 0$ ).

a) Etudier, suivant les valeurs de  $v_0$  et  $r_0$ , la nature du mouvement de  $S$  sur  $\Sigma$ .

b) Montrer que, d'une façon générale,  $S$  évolue entre deux plans  $P_1$  et  $P_2$  parallèles à  $xOy$ , dont on précisera les positions.

c) Montrer que la durée  $T$  de passage de  $S$  entre les deux plans peut être exprimée sous la forme

$$T = \int_0^\pi \sqrt{A + B \cos \alpha} d\alpha$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes que l'on explicitera en fonction des données.

## Solutions n° 4

### I - Le problème de Kepler

1°) Le moment cinétique de  $S$  par rapport à  $O$  est  $\vec{L} = m \vec{r} \wedge \vec{v}$  où  $\vec{r} = \vec{OM}$  et  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ . On applique le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}, \quad \text{car} \quad \vec{F} = -\frac{mMG}{r^3} \vec{r} \quad \text{est parallèle à} \quad \vec{r}$$

Le vecteur  $\vec{L}$  est donc constant, et  $\vec{r}$ , qui lui est toujours perpendiculaire est ainsi constamment contenu dans un plan fixe  $\mathcal{P}$ , perpendiculaire à ce vecteur et contenant aussi l'origine  $O$ .

2°)  $\mathcal{L} = E_c - E_p$  où  $E_c = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2]$  est l'énergie cinétique de  $S$  et  $E_p = -\frac{mMG}{r}$  est son énergie potentielle dans le champ de pesanteur terrestre.

3°) L'angle  $\phi$  est une variable cyclique car  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$ . L'équation d'Euler-Lagrange  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right]$  montre alors que la grandeur  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi}$  est une constante du mouvement de  $S$ . Cette constante est liée au moment cinétique car, écrivant  $\vec{r} = r \vec{e}_r$ ,  $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi$ ,  $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\phi = \vec{e}_z$ , il vient  $\vec{L} = mr^2 \dot{\phi} \vec{e}_z$ .

4°) a)  $E = E_c + E_p$  et,  $\vec{a}$  étant l'accélération de  $S$ ,  $\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot [m \vec{a} - \vec{F}] = 0$  car  $\vec{F}$  étant la seule force s'exerçant sur  $S$ , on a  $m \vec{a} = \vec{F}$ .

b)  $u' = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{dt}{d\phi} = -\frac{\dot{r}}{r^2 \dot{\phi}} = -\frac{\dot{r}}{C}$ , d'où

$$E = mC^2 \left[ \frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{2} - u \frac{GM}{C^2} \right]$$

Utilisant  $\frac{dE}{dt} = 0$  et en considérant que  $u' \neq 0$ , on obtient immédiatement

$$u'' + u = \frac{GM}{C^2}$$

d) Par intégration, on en déduit  $u = \frac{GM}{C^2} + A \cos(\phi + \phi_0)$ , soit encore, en redéfinissant les axes  $Ox$  et  $Oy$  dans le plan  $\mathcal{P}$ ,  $u = \frac{GM}{C^2} + A \cos \phi$ . Posons  $r_0 = \frac{C^2}{GM}$ ,  $e = \frac{C^2 A}{GM}$ . Il vient

$$u = \frac{1}{r_0}(1 + e \cos \phi), \quad \text{soit} \quad r(\phi) = \frac{r_0}{1 + e \cos \phi}$$

Le paramètre  $e$  peut être relié à l'énergie. On trouve en effet

$$e^2 = 1 + \frac{2r_0^2 E}{mC^2} = 1 + \frac{2r_0 E}{mMG}$$

On montre facilement que l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes est

$$\frac{(x + x_0)^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1, \quad \text{avec} \quad a = \frac{r_0^2}{(1 - e^2)^2}, \quad b = \frac{r_0^2}{1 - e^2} \quad \text{si} \quad |e| \neq 1$$

$$x = \pm \frac{r_0^2 - y^2}{2r_0} \quad \text{si} \quad e = \pm 1$$

La trajectoire est donc :

- un cercle si  $e = 0$  ;
- une parabole si  $e = \pm 1$  ;
- une ellipse si  $|e| < 1$  ;
- une hyperbole si  $|e| > 1$ .

On observe que  $E < 0$  si la trajectoire est bornée, et  $E > 0$  uniquement dans le cas de l'hyperbole (trajectoire non bornée).

## II - Mouvement contraint d'un anneau

1°) 2°) En coordonnées polaires  $(r, \phi)$ , la vitesse de l'anneau est  $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\omega \vec{e}_\phi$  ( $\dot{\phi} = \omega$ ). Le Lagrangien associé à ce mouvement est  $\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + \omega^2 r^2]$ , conduisant à l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\omega^2 r = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right] = m\ddot{r}, \quad \text{d'où l'équation} \quad \ddot{r} = \omega^2 r$$

dont la solution générale est  $r(t) = A \cosh \omega t + B \sinh \omega t$ . La vitesse radiale est donc  $\dot{r} = \omega [A \sinh \omega t + B \cosh \omega t]$ . A  $t = 0$ ,  $r = a$ ,  $\dot{r} = 0$ ; on en déduit  $B = 0$ ,  $A = a$ , donc  $r(t) = a \cosh \omega t$ .

### III - Mouvement contraint d'une bille

$$1^\circ) \mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2] - mgz = \frac{m}{2} [\dot{r}^2(1 + f'^2(r)) + r^2 \dot{\phi}^2] - mgf(r)$$

2°) L'angle  $\phi$  est une variable cyclique (invariance par rotation autour de  $Oz$ ) :  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$  et en conséquence de l'équation d'Euler-Lagrange  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right]$ , la grandeur  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi}$  est une constante du mouvement de  $S$ .

$$3^\circ) E = E_c + E_p = \frac{m}{2} [\dot{r}^2(1 + f'^2(r)) + r^2 \dot{\phi}^2] + mgf(r).$$

$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \left[ m \vec{a} - m \vec{g} \right] = \vec{v} \cdot \vec{R}$  où  $\vec{R}$  est la force de réaction due à la liaison entre  $S$  et la surface  $\Sigma$ . Or, cette liaison a lieu sans frottement, et cette force de réaction est donc perpendiculaire à la surface, donc à  $\vec{v}$ . Il s'ensuit que  $dE/dt = 0$  et l'énergie  $E$  est aussi une constante du mouvement de  $S$ .

4°) Tenant compte de la relation  $\dot{\phi} = C/r^2$ , récrivons l'énergie  $E$  sous la forme

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 (1 + f'^2(r)) + U(r), \quad \text{où} \quad U(r) = \frac{m}{2} \frac{C^2}{r^2} + mgf(r) \quad (3)$$

joue en quelque sorte le rôle d'une énergie potentielle vis-à-vis des variations de  $r$ . La différence

$$E - U(r) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 (1 + f'^2(r))$$

doit être toujours positive, ce qui restreint les variations possibles de  $r$  au domaine défini par  $U(r) \leq E$ . Les valeurs limites correspondant à l'égalité  $U(r) = E$  sont des points d'arrêt (ou de rebroussement) car la vitesse radiale  $\dot{r}$  y est nulle et y change de signe. Cela ne signifie pas que la vitesse de  $S$  est nulle en ces points car généralement  $C \neq 0$  et  $\dot{\phi} = C/r^2 \neq 0$ . De l'équation précédente on tire

$$\frac{dt}{dr} = \pm \sqrt{\frac{m(1 + f'^2)}{2}} \frac{1}{\sqrt{E - U(r)}}, \quad \text{et} \quad t(r) = \int_{r_i}^r \sqrt{\frac{m(1 + f'^2(u))}{2}} \frac{du}{\sqrt{E - U(u)}}$$

la dernière relation étant la forme implicite de l'équation horaire  $r(t)$  ( $t(r_i) = 0$ ).

5°) a) b) Comme  $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi + \dot{z} \vec{e}_z$ , avec

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \cos \phi + \vec{e}_y \sin \phi, \quad \vec{e}_\phi = -\vec{e}_x \sin \phi + \vec{e}_y \cos \phi,$$

les conditions initiales correspondant aux coordonnées cylindriques sont  $r(0) = r_0$ ,  $\phi(0) = 0$ ,  $z(0) = ar_0^2$ ,  $\dot{r}(0) = 0$ ,  $(r\dot{\phi})(0) = v_0$ ,  $\dot{z}(0) = 0$ , et l'on a  $C = r_0 v_0$  et  $E = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g a r_0^2$ .

On a alors  $E - U(r) = \frac{m}{2}v_0^2 \left[1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right] + mga(r_0^2 - r^2) = \frac{mga(r^2 - r_0^2)}{r^2} \left[\frac{v_0^2}{2ga} - r^2\right]$

La condition  $E - U(r) \geq 0$  se réécrit ici comme  $[r^2 - r_0^2] [r_1^2 - r^2] \geq 0$  où  $r_1 = \frac{v_0}{\sqrt{2ga}}$ .

On en conclut que les variations de  $r$  sont limitées au domaine défini par

$$\text{Min}(r_0, r_1) \leq r \leq \text{Max}(r_0, r_1)$$

auquel correspond le domaine

$$\text{Min}(z_0, z_1) \leq z \leq \text{Max}(z_0, z_1)$$

pour la cote  $z$  de  $S$ , où  $z_0 = ar_0^2$ ,  $z_1 = ar_1^2$ . La bille  $S$  évolue donc entre deux plans parallèles à  $xOy$ , l'un,  $P_1$ , défini par  $z = z_1$ , l'autre,  $P_0$ , défini par  $z = z_0$ . En dérivant (3) par rapport au temps, et en excluant le cas  $\dot{r}(t) = 0$  (cercle), on trouve

$$\ddot{r} = \frac{1}{1 + 4a^2r^2} \left[ \frac{v_0^2 r_0^2}{r^3} - 2agr - 4a^2 r \dot{r}^2 \right], \quad \text{et} \quad \ddot{r}(0) = \frac{2ag}{r_0(1 + 4a^2r_0^2)} [r_1^2 - r_0^2]$$

Supposons alors  $r_1 > r_0$ . On a donc  $\ddot{r}(0) > 0$ , et  $\dot{r}$ , nul au départ, va commencer à croître et devenir positif, entraînant un accroissement de  $r$  et donc de  $z$ . Tout en tournant ( $\dot{\phi} \neq 0$ ), la bille va alors monter le long de la surface (paraboloïde) jusqu'à la cote  $z_1$ . A cette cote,  $\dot{r} = 0$ , la vitesse de la bille est  $\vec{v}_1 = v_0 \frac{r_0}{r_1} \vec{e}_{\phi_1}$  et son accélération radiale est  $\ddot{r}_1 = \frac{2ag}{r_1(1 + 4a^2r_1^2)} [r_0^2 - r_1^2] < 0$ . A partir de là, la vitesse radiale va décroître et devenir négative, entraînant une décroissance de  $r$  et de  $z$  et donc d'une descente de  $S$ . Arrivée à la cote  $z_0$ , la bille va recommencer son mouvement d'ascension jusque la cote  $z_1$ , etc. Le mouvement de la bille, s'effectuant sans frottement, est donc périodique.

**Remarque** Le "potentiel"  $U(r)$  défini en (3) prend ici la forme

$$U(r) = mga \left[ r^2 + \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2} \right]$$

Il présente un minimum pour  $r = r_e = \sqrt{r_0 r_1}$ , valeur de  $r$  toujours comprise entre  $\text{Min}(r_0, r_1)$  et  $\text{Max}(r_0, r_1)$ .

c) La période du mouvement périodique décrit ci-dessus est, pour  $r_0 < r_1$ ,

$$T = 2 \frac{r_1}{v_0} \int_{r_0}^{r_1} \frac{\sqrt{1 + 4a^2r^2} \, r dr}{\sqrt{(r^2 - r_0^2)(r_1^2 - r^2)}} = \frac{r_1}{v_0} \int_{r_0^2}^{r_1^2} \frac{\sqrt{1 + 4a^2r^2}}{\sqrt{(u - r_0^2)(r_1^2 - u)}} du$$

Effectuons le changement de variable  $u = \frac{r_1^2 + r_0^2}{2} - \cos \alpha \frac{r_1^2 - r_0^2}{2}$  avec  $0 \leq \alpha \leq \pi$ , donnant

$$\frac{du}{\sqrt{(u - r_0^2)(r_1^2 - u)}} = d\alpha, \quad \text{et} \quad 1 + 4a^2r^2 = 1 + 2a^2(r_1^2 + r_0^2) - 2a^2(r_1^2 - r_0^2) \cos \alpha$$

Il vient alors

$$T = \int_0^\pi \sqrt{A + B \cos \alpha} \, d\alpha, \quad \text{avec} \quad A = \frac{r_1^2}{v_0^2} [1 + 2a^2(r_1^2 + r_0^2)], \quad B = -2a^2 \frac{r_1^2}{v_0^2} [r_1^2 - r_0^2]$$

## Exercices n° 5

### - Lagrangiens II -

**I - Chute d'une échelle** - Une barre  $AB$ , homogène, de masse  $M$ , de longueur  $L$  et de centre  $G$  est posée sur le sol horizontal en son extrémité  $A$  et repose sur un mur vertical en son extrémité  $B$ . Le sol et le mur définissent respectivement le plan  $xOy$  et le plan  $yOz$  ( $\vec{Oz}$  est selon la verticale ascendante). Alors que la barre est initialement immobile dans le plan  $xOz$  en faisant l'angle  $\theta_0$  avec le mur, elle se met à glisser. Le but de cet exercice est d'étudier son mouvement de chute. On admettra que la barre reste constamment dans le plan  $xOz$  et l'on notera  $\theta$  l'angle qu'elle fait avec le mur. Les contacts en  $A$  et  $B$  se font sans frottement. Le référentiel terrestre est supposé galiléen.

1°) a) Montrer que, tant que la barre reste en contact avec le mur, son centre  $G$  est astreint à se déplacer sur un cercle.

b) En déduire les expressions de la vitesse instantanée  $\vec{V}_G$  et de l'énergie cinétique  $E_G$  du point  $G$ , auquel est attribuée la masse totale  $M$  de la barre.

2°) a) Exprimer les coordonnées  $x$  et  $z$  d'un point  $P$  de la barre en fonction de  $\theta$  et de la distance  $s$  séparant  $P$  de  $B$ .

b) En déduire les composantes  $\dot{x}$  et  $\dot{z}$  de la vitesse de  $M$ , puis l'énergie cinétique de l'élément de la barre de longueur  $ds$  en  $P$ .

c) En déduire, par intégration, l'énergie cinétique totale  $E$  de la barre complète. Interpréter la différence  $E - E_G$ .

3°) a) Exprimer le Lagrangien  $\mathcal{L}$  de la barre en fonction de  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ , des données  $M$ ,  $L$  et de  $g$ , accélération de la pesanteur.

b) Trouver alors l'équation différentielle régissant l'évolution de  $\theta$  au cours du temps lorsque la barre reste en contact avec le mur.

4°) Exprimer l'intégrale première de l'énergie et montrer que

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

5°) a) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à la barre, considérée comme un tout. On notera  $\vec{R}_A = R_A \vec{e}_z$  et  $\vec{R}_B = R_B \vec{e}_x$  respectivement les réactions du sol et du mur sur la barre.

b) Compte-tenu des relations trouvées au 3°) b) et au 4°), montrer que

$$R_A = \frac{Mg}{4} (\sin^2 \theta_0 + (3 \cos \theta - \cos \theta_0)^2) , \quad R_B = \frac{3Mg}{4} \sin \theta (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

c) En déduire qu'à partir d'un certain angle  $\theta_M$  la barre ne peut plus être en contact avec le mur.

6°) a) On cherche à évaluer le laps de temps  $t_M$  qui s'écoule avant que la barre ne quitte le mur. Pour ce faire, on admet que l'angle  $\theta$  reste suffisamment petit pour que l'on puisse confondre  $\sin \theta$  et  $\theta$ . Montrer alors que l'on a approximativement

$$\ddot{\theta} \approx \Omega^2 \theta$$

avec  $\Omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$ .

b) Compte-tenu des conditions initiales, en déduire que

$$\theta = \theta_0 \cosh \Omega t$$

c) En admettant que cette dernière relation peut être appliquée jusqu'à  $\theta \sim \theta_M$ , montrer que

$$t_M \approx \frac{1}{\Omega} \ln \left( \frac{\theta_M}{\theta_0} + \sqrt{\frac{\theta_M^2}{\theta_0^2} - 1} \right)$$

7°) On donne  $L = 3\text{m}$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $\theta_0 = 30^\circ$ . Evaluer numériquement  $t_M$  et comparer cette durée à celle d'une chute libre de même hauteur.

**II - Pendule double** - On considère un système "pendule double". Il est constitué de deux masses  $M_1$  et  $M_2$  de même valeur  $m$  reliées entre elles par une tige rigide et inextensible de longueur  $\ell$  et de masse négligeable. La masse  $M_1$  est elle-même reliée à un point fixe  $O$  par une tige rigide et inextensible, elle aussi de longueur  $\ell$ . Les seuls mouvements envisagés pour ce système s'effectuent dans le plan vertical  $xOy$ , l'axe  $\vec{Ox}$  étant selon l'horizontale et l'axe  $\vec{Oy}$  selon la verticale descendante. Tout frottement sera négligé.

1°) Expliquer pourquoi ce système est à seulement deux degrés de liberté.

2°) On note  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les angles que font respectivement le premier pendule  $OM_1$  et le second pendule  $M_1M_2$  avec l'axe  $\vec{Oy}$ . Initialement, le système est amené dans une position telle que  $\theta_1(0) = \theta_0$ ,  $\theta_2(0) = 0$ , puis est lâché sans vitesse initiale.

a) Exprimer les vitesses instantanées respectives de  $M_1$  et de  $M_2$  en fonction de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\dot{\theta}_1$ ,  $\dot{\theta}_2$  et  $\ell$ .

b) En déduire l'énergie cinétique de l'ensemble.

c) Exprimer (à une constante près) l'énergie potentielle de pesanteur de l'ensemble en fonction de  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $m$ ,  $\ell$  et  $g$ , accélération de la pesanteur.

3°) a) Définir le Lagrangien du système pour lequel  $\theta_1$  et  $\theta_2$  seront les coordonnées généralisées.

b) Ecrire les équations d'Euler-Lagrange correspondantes et en déduire les équations régissant les évolutions de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  au cours du temps.

4°) On suppose que  $\theta_0$  est suffisamment petit pour que l'on puisse effectuer une approximation de petits angles ( $\sin \theta \approx \theta$ ). Montrer qu'avec cette approximation les équations d'évolution prennent la forme

$$\ddot{\theta}_1 = -\omega^2 (2\theta_1 - \theta_2) \quad , \quad \ddot{\theta}_2 = 2\omega^2 (\theta_1 - \theta_2)$$

avec  $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ .

5°) a) Effectuer alors le changement de variables :

$$\Psi_1 = \theta_1 + \frac{\theta_2}{\sqrt{2}} \quad , \quad \Psi_2 = \theta_1 - \frac{\theta_2}{\sqrt{2}}$$

et montrer que ces nouvelles coordonnées satisfont une équation de la forme

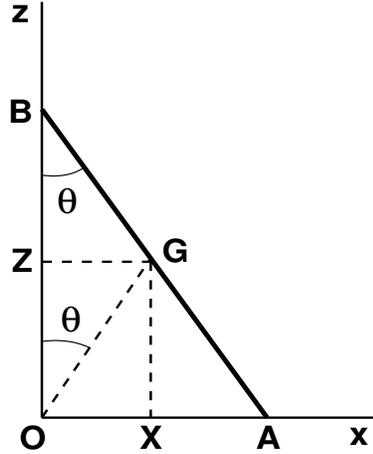
$$\ddot{\Psi}_{1,2} = -\Omega_{1,2}^2 \Psi_{1,2}$$

$\Omega_1$  et  $\Omega_2$  étant deux constantes positives à déterminer.

b) Intégrer les équations obtenues puis trouver  $\theta_1(t)$  et  $\theta_2(t)$ , compte-tenu des conditions initiales.

Solutions n° 5

**I - Chute d'une échelle -**



1°) a)  $X = L \sin \theta / 2$ ,  $Z = L \cos \theta / 2$ , donc  $OG^2 = X^2 + Z^2 = L^2 / 4$  et  $G$  reste sur le cercle de centre  $O$  et de rayon  $L/2$ .

b)  $\vec{OG} = \frac{L}{2} [\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z]$ , donc  $\vec{V}_G = \frac{L\dot{\theta}}{2} [\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_z]$ , puis

$$E_G = \frac{MV_G^2}{2} = \frac{M\dot{\theta}^2}{8}$$

2°)  $x = s \sin \theta$ ,  $z = (L - s) \cos \theta$ ;  $\dot{x} = s\dot{\theta} \cos \theta$ ,  $\dot{z} = -(L - s)\dot{\theta} \sin \theta$ ;

$$e_c(P) = \frac{\mu ds}{2} \dot{\theta}^2 [s^2 \cos^2 \theta + (L - s)^2 \sin^2 \theta], \text{ d'où}$$

$$E_c = \int_0^L e_c(P) = \frac{ML^2 \dot{\theta}^2}{6}$$

La différence  $E_c - E_G = \frac{ML^2 \dot{\theta}^2}{24}$  est l'énergie cinétique de rotation de la barre, correspondant

à un moment d'inertie égal à  $J = \frac{ML^2}{12}$ .

3°)  $\mathcal{L} = E_c - E_p$ , avec  $E_p = \int_0^L g\mu(s \cos \theta) ds = (E_p)_G = \frac{MgL}{2} \cos \theta$ , soit

$$\mathcal{L} = \frac{ML^2 \dot{\theta}^2}{6} - \frac{MgL}{2} \cos \theta$$

L'équation d'Euler-Lagrange  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{MgL}{2} \sin \theta = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] = \frac{ML^2 \ddot{\theta}}{3}$  conduit à l'équation différentielle du mouvement de l'échelle :

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2L} \sin \theta \quad (4)$$

4°)  $E = \frac{ML^2 \dot{\theta}^2}{6} + \frac{MgL}{2} \cos \theta = \text{constante} = \frac{MgL}{2} \cos \theta_0$ , d'où

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad (5)$$

5°)  $M \frac{d\vec{V}_G}{dt} = M \vec{g} + \vec{R}_A + \vec{R}_B$ , avec  $\vec{R}_A = R_A \vec{e}_z$ ,  $\vec{R}_B = R_B \vec{e}_x$ . Comme

$$\frac{d\vec{V}_G}{dt} = \frac{L\ddot{\theta}}{2} [\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_z] - \frac{L\dot{\theta}^2}{2} [\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_z]$$

il vient  $R_A = Mg - \frac{ML}{2} [\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta]$ ,  $R_B = \frac{ML}{2} [\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta]$ . Compte tenu de (4) et (5), on trouve aisément

$$R_A = \frac{Mg}{4} (\sin^2 \theta_0 + (3 \cos \theta - \cos \theta_0)^2) \quad , \quad R_B = \frac{3Mg}{4} \sin \theta (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

On a toujours  $R_A > 0$ ; par contre,  $R_B$  peut s'annuler si  $\cos \theta = \cos \theta_M = \frac{2}{3} \cos \theta_0$ ; si  $\theta > \theta_M$ , cela correspondrait à  $R_B < 0$ , ce qui n'est pas réalisable, et l'échelle quitte le mur.

6°) La solution générale de l'équation  $\ddot{\theta} = \Omega^2 \theta$  est  $\theta = A \cosh \Omega t + B \sinh \Omega t$ . Tenant compte des conditions initiales  $\theta(0) = \theta_0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ , on trouve  $\theta = \theta_0 \cosh \Omega t$ . Sachant que  $\cosh x + \sinh x = e^x$  et  $x = \ln [\cosh x + \sqrt{\cosh^2 x - 1}]$ , on a aussi

$$t = \frac{1}{\Omega} \ln \left[ \frac{\theta}{\theta_0} + \sqrt{\frac{\theta^2}{\theta_0^2} - 1} \right] \quad (6)$$

7°) On suppose que (6) est applicable jusque  $\theta_M$ . Avec les données, on trouve  $t_M \simeq 0,54$  s. En comparaison, une chute libre directe de  $G$  de  $\ell = \frac{L}{2} \cos \theta_0 = 1,3$  m dure  $t' \simeq 0,51$  s.

## II - Pendule double -

1°) A priori, il y a 3 degrés de liberté pour chacune des deux masses, donc au total 6 degrés de liberté. Cependant, le système est astreint à se déplacer dans le plan  $xOy$ , ce qui élimine 2 degrés de liberté. Deux autres sont aussi éliminés de part la présence de 2 liaisons. Il ne reste donc que 2 degrés de liberté pour le système.

$$2^\circ) \text{ a) } \vec{OM}_1 = \ell \left[ \cos \theta_1 \vec{e}_y + \sin \theta_1 \vec{e}_x \right], \quad \vec{v}_1 = \ell \dot{\theta}_1 \left[ -\sin \theta_1 \vec{e}_y + \cos \theta_1 \vec{e}_x \right];$$

$$\vec{OM}_2 = \vec{OM}_1 + M_1 \vec{M}_2 = \vec{OM}_1 + \ell \left[ \cos \theta_2 \vec{e}_y + \sin \theta_2 \vec{e}_x \right], \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \ell \dot{\theta}_2 \left[ -\sin \theta_2 \vec{e}_y + \cos \theta_2 \vec{e}_x \right].$$

$$\text{b) } E_c = \frac{m\ell^2}{2} \left[ 2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right].$$

$$\text{c) } E_p = -2mgl \cos \theta_1 - mgl \cos \theta_2.$$

$$3^\circ) \text{ a) } \mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{m\ell^2}{2} \left[ 2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right] + 2mgl \cos \theta_1 + mgl \cos \theta_2.$$

$$\text{b) } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = -m\ell \left[ \ell \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2g \sin \theta_1 \right];$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right] = m\ell^2 \left[ 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 2\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \right];$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = m\ell \left[ \ell \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin \theta_2 \right];$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} \right] = m\ell^2 \left[ \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) \right];$$

d'où les équations d'évolution :

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - 2\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) = - \left[ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2\omega^2 \sin \theta_1 \right]$$

$$\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) = \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \omega^2 \sin \theta_2$$

$$\text{où } \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

4°) Dans le cas des petits angles, on ne conserve pour chacun des termes que sa partie linéaire suivant ces angles, pour aboutir aux équations :  $2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -2\omega^2 \theta_1$ ,  $\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 \theta_2$ , soit

$$\ddot{\theta}_1 = -\omega^2 (2\theta_1 - \theta_2) \quad , \quad \ddot{\theta}_2 = 2\omega^2 (\theta_1 - \theta_2)$$

5°) a) Effectuant ledit changement de variables, on trouve :

$$\ddot{\Psi}_{1,2} = -\Omega_{1,2}^2 \Psi_{1,2}, \quad \text{avec } \Omega_1^2 = \omega^2(2 - \sqrt{2}), \quad \Omega_2^2 = \omega^2(2 + \sqrt{2})$$

b)  $\Psi_1 = A_1 \cos \Omega_1 t + B_1 \sin \Omega_1 t$ ,  $\Psi_2 = A_2 \cos \Omega_2 t + B_2 \sin \Omega_2 t$ . A  $t = 0$ , on a  $\Psi_1(0) \Psi_2(0) = \theta_0$ ,  $\dot{\Psi}_1(0) = \dot{\Psi}_2(0) = 0$ , d'où  $\Psi_1(t) = \theta_0 \cos \Omega_1 t$ ,  $\Psi_2(t) = \theta_0 \cos \Omega_2 t$ , et finalement,

$$\theta_1 = \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2} = \frac{\theta_0}{2} [\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t], \quad \theta_2 = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{\sqrt{2}} = \frac{\theta_0}{\sqrt{2}} [\cos \Omega_1 t - \cos \Omega_2 t]$$

## Exercices n° 6

### - Lagrangiens III -

**I - Machine d'Atwood** - On considère le dispositif représenté à la figure 1. Les fils reliant  $m_1$  au centre de la deuxième poulie d'une part et les deux masses  $m_3$  et  $m_4$  d'autre part sont inextensibles, de longueurs  $\ell_1$  et  $\ell_2$  respectivement, et leurs masses sont négligeables. Les seuls mouvements de cet ensemble, soumis à la seule action de la pesanteur, ont lieu dans un plan vertical donné et se font sans frottement, et l'on considère comme négligeable l'énergie cinétique de rotation des poulies.

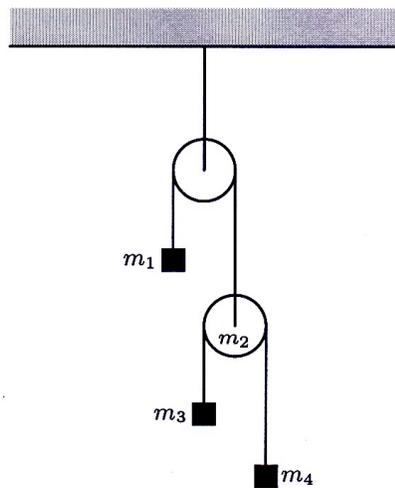


Figure 1

- 1°) Répertorier les contraintes de ce système et en déduire le nombre de ses degrés de liberté.
- 2°) Définir pour ce système un Lagrangien en choisissant les positions des masses  $m_1$  et  $m_3$  comme coordonnées généralisées.
- 3°) Trouver les équations d'évolution de ces masses et en déduire leurs accélérations.

**II - Pendule simple relié à un ressort** - Une tige rigide de longueur  $\ell$  et de masse négligeable est mobile autour de l'une de ses extrémités fixée en un point  $O$ . A l'autre extrémité  $M$  est attachée une masse  $m$ . Cette même masse est reliée par l'intermédiaire d'un ressort de masse négligeable et de raideur  $k$  à un point fixe  $P$  situé sur la même verticale que celle passant par  $O$ , à la distance  $2\ell$  en dessous de ce point (figure 2). La longueur au

repos  $d$  du ressort est telle que  $0 < d \leq \ell$ . Les frottements sont négligés. On note  $\theta$  l'angle que fait  $\vec{OM}$  avec la verticale descendante  $\vec{OP}$ .

1°) Définir pour ce système un Lagrangien et en déduire l'équation d'évolution de  $\theta$ .

2°) Considérer le cas des petits angles.

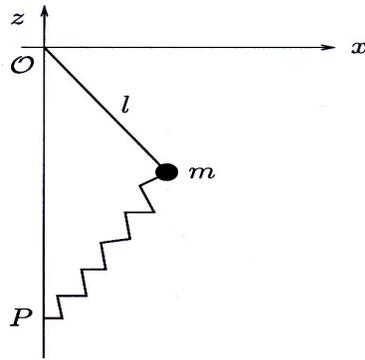


Figure 2

**III** - Une masse  $M$  est reliée à deux autres masses  $m$  par l'intermédiaire de deux ressorts identiques, sans masse, de raideur  $k$  et de longueur au repos  $\ell$ , comme indiqué à la figure 3.

Les trois masses sont alignées suivant un axe  $x'x$  et les seuls mouvements envisagés de ces masses s'effectuent sans frottement selon cet axe. La pesanteur terrestre est ici négligée. Ce système peut constituer un modèle très simplifié pour décrire les vibrations d'une molécule triatomique. On note  $x_1$  et  $x_3$  les abscisses des masses  $m$  et  $x_2$  celle de la masse  $M$ .

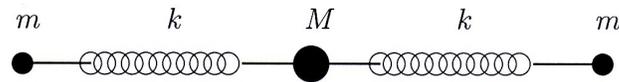


Figure 3

1°) Exprimer l'énergie potentielle de ce système en fonction des coordonnées généralisées  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = x_2 - \ell$  et  $q_3 = x_3 - 2\ell$ .

2°) Déduire des équations de Lagrange l'ensemble des équations d'évolution du système.

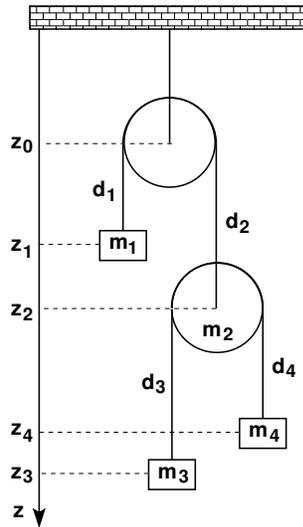
3°) a) On pose  $\omega^2 = k/m$ ,  $\Omega^2 = k/M$ . Ecrire les équations sous forme matricielle

$$\ddot{Q} = A Q \quad \text{où} \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad \text{et } A \text{ une matrice } 3 \times 3.$$

- b) Chercher les valeurs propres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  de la matrice  $A$  et les vecteurs propres correspondants  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  et  $\Psi_3$ .
- c) Mettre alors  $Q$  sous la forme  $Q = u_1\Psi_1 + u_2\Psi_2 + u_3\Psi_3$  où  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  sont des combinaisons de  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$ , et déduire les équations différentielles devant être satisfaites par  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
- d) Résoudre ces nouvelles équations, et décrire les modes propres de vibration obtenus.

## Solutions n° 6

### I - Machine d'Atwood -



1°) Parmi les quatre variables  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ , seules deux sont indépendantes du fait des liaisons imposées par les deux fils inextensibles. Nous choisissons  $z_1$  et  $z_3$  comme étant ces variables indépendantes.

2°) Notons  $d_0$  la longueur de fil restant sur les poulies. On a  $d_1 + d_2 + d_0 = d_3 + d_4 + d_0 = \ell$ . Puis  $z_1 - z_0 = d_1$ ,  $z_2 - z_0 = d_2$ , donc  $z_1 + z_2 = \ell - d_0 + 2z_0$ ; et  $z_3 - z_2 = d_3$ ,  $z_4 - z_2 = d_4$ , donc  $z_3 + z_4 - 2z_2 = \ell - d_0$ . On en déduit

$$\dot{z}_2 = -\dot{z}_1, \quad \dot{z}_4 = -\dot{z}_3 - 2\dot{z}_1$$

Le Lagrangien de ce système est  $\mathcal{L} = E_c - E_p$ , où  $E_c$  est l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 m_i \dot{z}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{z}_1^2 (m_1 + m_2 + 4m_4) + \frac{1}{2} \dot{z}_3^2 (m_3 + m_4) + 2m_4 \dot{z}_1 \dot{z}_3$$

et  $E_p$  est l'énergie potentielle de pesanteur (la verticale est descendante)

$$E_p = \sum_{i=1}^4 m_i g z_i = g z_1 (m_1 - m_2 - 2m_4) + g z_3 (m_3 - m_4) + \text{constante}$$

3°) Les équations d'Euler-Lagrange :  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_1} \right]$ ,  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_3} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_3} \right]$  conduisent aux équations d'évolution couplées

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2 + 4m_4)\ddot{z}_1 + 2m_4\ddot{z}_3 &= g(m_1 - m_2 - 2m_4) \\ 2m_4\ddot{z}_1 + (m_3 + m_4)\ddot{z}_3 &= g(m_3 - m_4)\end{aligned}$$

qui donnent finalement

$$\begin{aligned}\ddot{z}_1 &= g \frac{(m_1 - m_2)(m_3 + m_4) - 4m_3m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3m_4}, \\ \ddot{z}_3 &= g \frac{(m_1 + m_2)(m_3 - m_4) + 2m_4(2m_3 + m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3m_4}\end{aligned}$$

## II - Pendule simple relié à un ressort -

1°)  $\mathcal{L} = E_c - E_p$  où  $E_c$  est l'énergie cinétique de la masse  $m$  et  $E_p$  l'énergie potentielle comprenant l'énergie potentielle de pesanteur  $E_m$  de la masse  $m$  et l'énergie potentielle  $E_r$  du ressort. On a  $\vec{V}_m = \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta$  avec  $\vec{e}_\theta = -\cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \vec{e}_x$ , donc  $E_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$ . Puis

$E_m = -mg\ell \cos \theta$ , et  $E_r = \frac{1}{2} k(Pm - d)^2$ . On a  $(Pm)^2 = \left( \vec{PO} + \vec{Om} \right)^2 = \ell^2(5 - 4 \cos \theta)$ .

Finalement,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta - \frac{1}{2} k(Pm - d)^2$$

On a  $\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] = m \ell^2 \ddot{\theta}$  et  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mg\ell \sin \theta - k(Pm - d) \frac{dPm}{d\theta}$ . Or,  $\frac{dPm}{d\theta} = \frac{2 \sin \theta \ell^2}{Pm}$ , d'où

$$\ddot{\theta} = -\sin \theta \left[ \frac{g}{\ell} + 2 \frac{k}{m} \left( 1 - \frac{d}{Pm} \right) \right]$$

2°) Dans le cas des petits angles, on fait les approximations  $\sin \theta \simeq \theta$  et  $Pm \simeq \ell$ , ce qui conduit à l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} = -\Omega^2 \theta, \quad \text{avec} \quad \Omega^2 = \frac{g}{\ell} + 2 \frac{k}{m} \left( 1 - \frac{d}{\ell} \right)$$

N.B. On rappelle que  $d < \ell$ .

### III - Molécule triatomique -

1°)  $E_p = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - \ell)^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_2 - \ell)^2$ , soit, en fonction des coordonnées généralisées  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = x_2 - \ell$  et  $q_3 = x_3 - 2\ell$ ,  $E_p = \frac{1}{2}k(q_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2}k(q_3 - q_2)^2$ .

2°) Le Lagrangien est  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}_3^2 - \frac{1}{2}k(q_2 - q_1)^2 - \frac{1}{2}k(q_3 - q_2)^2$ , conduisant, via les équations d'Euler-Lagrange, aux équations d'évolution :

$$\ddot{q}_1 = -\omega^2(q_1 - q_2), \quad \ddot{q}_2 = -\Omega^2(2q_2 - q_1 - q_3), \quad \ddot{q}_3 = -\omega^2(q_3 - q_2)$$

où l'on a posé  $\omega^2 = k/m$ ,  $\Omega^2 = k/M$ .

3°) La matrice  $A$  est

$$A = \begin{pmatrix} -\omega^2 & \omega^2 & 0 \\ \Omega^2 & -2\Omega^2 & \Omega^2 \\ 0 & \omega^2 & -\omega^2 \end{pmatrix}$$

Elle a pour polynôme caractéristique  $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = -\lambda(\lambda + \omega^2)(\lambda + \omega^2 + 2\Omega^2)$  et ses valeurs propres sont donc  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -\omega^2$  et  $\lambda_3 = -\omega^2 - 2\Omega^2$ . Ces dernières étant distinctes, la matrice  $A$  est diagonalisable. Notons  $\Psi_i = (a_i, b_i, c_i)$  le vecteur propre correspondant à la valeur propre  $\lambda_i$ . On a

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 & \omega^2 & 0 \\ \Omega^2 & -2\Omega^2 & \Omega^2 \\ 0 & \omega^2 & -\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2(b_1 - a_1) \\ \Omega^2(a_1 + c_1 - 2b_1) \\ \omega^2(b_1 - c_1) \end{pmatrix} = 0$$

donc  $a_1 = b_1 = c_1$ . Nous prendrons  $\Psi_1 = (1, 1, 1)$ . Puis

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega^2 & 0 \\ \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 & \Omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

donc  $b_2 = 0$ ,  $a_2 = -c_2$ . Nous prendrons  $\Psi_2 = (1, 0, -1)$ . Puis

$$\begin{pmatrix} 2\Omega^2 & \omega^2 & 0 \\ \Omega^2 & \omega^2 & \Omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 2\Omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Omega^2 a_3 + \omega^2 b_3 \\ \Omega^2(a_3 + c_3) + \omega^2 b_3 \\ \omega^2 b_3 + 2\Omega^2 c_3 \end{pmatrix} = 0$$

donc  $a_3 = c_3$ ,  $b_3 = -2\frac{\Omega^2}{\omega^2} a_3$ . Nous prendrons  $\Psi_3 = (1, -2\frac{\Omega^2}{\omega^2}, 1)$ .

Notons  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{C}^3$  et  $P$  la matrice de passage de la base  $(e_1, e_2, e_3)$  à la base  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2\frac{\Omega^2}{\omega^2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{2(1 + 2\frac{\Omega^2}{\omega^2})} \begin{pmatrix} 2\frac{\Omega^2}{\omega^2} & 2 & 2\frac{\Omega^2}{\omega^2} \\ 1 + 2\frac{\Omega^2}{\omega^2} & 0 & -(1 + 2\frac{\Omega^2}{\omega^2}) \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecrivons  $Q = u_1\Psi_1 + u_2\Psi_2 + u_3\Psi_3$  où  $u_1, u_2$  et  $u_3$  sont des combinaisons de  $q_1, q_2$  et  $q_3$ , puis définissons  $U = P^{-1}Q = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ . On a  $\ddot{U} = P^{-1}\ddot{Q} = P^{-1}APU$ . Or  $P^{-1}AP = \Delta$  est la forme diagonale de  $A$  :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2 - 2\Omega^2 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \ddot{U} = \ddot{u}_1e_1 + \ddot{u}_2e_2 + \ddot{u}_3e_3 = 0e_1 - \omega^2u_2e_2 - (\omega^2 + 2\Omega^2)u_3e_3, \quad \text{soit} \\ \ddot{u}_1 = 0, \quad \ddot{u}_2 = -\omega^2u_2, \quad \ddot{u}_3 = -(\omega^2 + 2\Omega^2)u_3 \end{aligned}$$

L'intégration de ces équations donne

$$u_1 = A_1t + B_1, \quad u_2 = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t, \quad u_3 = A_3 \cos \Omega' t + B_3 \sin \Omega' t$$

où  $\Omega' = \sqrt{\omega^2 + 2\Omega^2}$ . Explicitons les relations entre les  $u_i$  et les  $q_i$ . On a

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = P^{-1}Q = \frac{1}{\omega^2 + 2\Omega^2} \begin{pmatrix} \Omega^2(q_1 + q_3) + \omega^2q_2 \\ (\omega^2 + 2\Omega^2)(q_1 - q_3) \\ \omega^2\frac{q_1 + q_3 - 2q_2}{2} \end{pmatrix}$$

Supposons que  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$ , ce qui implique  $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = \dot{q}_3(0) = 0$  et aussi  $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = \dot{u}_3(0) = 0$ . On en déduit  $u_1 = B_1 = \text{constante}$ ,  $u_2 = A_2 \cos \omega t$ ,  $u_3 = A_3 \cos \Omega' t$ . Voyons plus en détail ce que représente la variable  $u_1$ . On a

$$u_1 = \frac{m(q_1 + q_3) + Mq_2}{M + 2m} = \frac{m(x_1 + x_3) + Mx_2}{M + 2m} - \ell$$

A la constante  $-\ell$  près, cette coordonnée est l'abscisse du centre de masse du système. Ledit système étant ici supposé isolé, son centre de masse est soit au repos, soit animé d'un mouvement uniforme de long de l'axe  $Ox$ . Il n'est donc pas étonnant que  $u_1$  soit associé à la valeur propre zéro conduisant à la loi horaire trouvée plus haut. Pour simplifier l'analyse, supposons  $u_1 = 0$ . On a alors  $q_2 = -\frac{m}{M}(q_1 + q_3)$  et

$$u_2 = \frac{1}{2}(q_1 - q_3), \quad u_3 = \frac{1}{2}(q_1 + q_3)$$

Un mode d'oscillation donné correspond à l'annulation de l'une ou l'autre de ces deux coordonnées. On relève ainsi

- le mode pour lequel  $q_3 = -q_2$  et donc  $u_3 = 0$  et  $q_2 = 0$  : les deux masses  $m$  oscillent en opposition tandis que la masse  $M$  reste immobile ;
- le mode pour lequel  $q_3 = q_2$  et donc  $u_2 = 0$  et  $q_2 = -\frac{2m}{M}q_1$  : les deux masses  $m$  oscillent dans un même sens, tandis que la masse  $M$  oscille dans le sens opposé, de telle sorte que le centre de masse reste immobile, et avec une amplitude plus faible si  $M > 2m$ .

- **Remarque** - D'une façon générale, le nombre de degrés de liberté d'un ensemble de  $N$  masses ponctuelles est  $3N$ , chacune de ces masses ayant 3 possibilités de déplacement dans l'espace à trois dimensions (translations, uniquement). Cependant, tous ces degrés de liberté ne sont pas impliqués dans la description des interactions possibles entre ces masses. Considérant le système comme un tout, il en est ainsi des 3 degrés de liberté de translation de son centre de masse, et des degrés de liberté de rotation globale du système. Pour des systèmes où les masses ne sont pas alignées, les degrés de liberté de rotation globale sont au nombre de 3, ce qui donne finalement  $3N - 6$  degrés de liberté internes, tandis que pour des systèmes où les masses sont toutes alignées, ce nombre tombe à 2, ce qui leur laisse  $3N - 5$  degré de liberté internes. Pour le système des trois masses étudié plus haut, on aurait donc  $3 \times 3 - 5 = 4$  modes d'oscillations possibles. Comme on a supposé le système contraint d'osciller le long de  $Ox$ , 2 modes correspondant à des oscillations dans un plan contenant  $Ox$  sont éliminées d'emblée, laissant deux modes d'oscillations possibles le long de  $Ox$ .

## Exercices n° 7

### - Lagrangiens IV -

**I** - Un disque  $D$ , homogène, de masse  $M$ , de rayon  $R$ , roule sans glisser dans un plan vertical, suivant un axe horizontal  $x'x$ . En son centre  $C$  est attaché un fil rigide, inextensible, de longueur  $\ell$  et de masse négligeable. A l'autre extrémité du fil est attachée une masse  $m$  assimilable à un point matériel  $M$ . Le fil est initialement écarté de la verticale d'un angle  $\theta_0$ , puis l'ensemble est abandonné sans vitesse initiale. On veut étudier le mouvement ultérieur du système, en supposant que les frottements sont négligeables. On note  $x$  l'abscisse de  $C$  et  $\theta$  l'angle du fil avec la verticale descendante.

1°) Calculer le moment d'inertie du disque par rapport à un axe passant par son centre et perpendiculaire au plan du disque (pour faire ce calcul, on attribuera une épaisseur  $h$  au disque).

2°) a) Définir pour ce système un Lagrangien dépendant des coordonnées généralisées  $x$  et  $\theta$  et déduire les équations du mouvement.

b) Montrer notamment que l'on a

$$\dot{x} = -\frac{m\ell}{m + 3M/2} \dot{\theta} \cos \theta$$

c) En utilisant cette dernière relation, trouver l'équation différentielle à laquelle  $\theta$  doit satisfaire.

3°) Considérer le cas des petites oscillations ( $\theta_0$  "petit") et montrer que dans ce cas la vitesse angulaire de rotation du disque est donnée par

$$\dot{\varphi} = -\frac{m\ell\Omega\theta_0}{R(m + 3M/2)} \sin \Omega t \quad \text{avec} \quad \Omega = \sqrt{\frac{g}{\ell} \left(1 + \frac{2m}{3M}\right)}$$

**II - Le Yoyo** - Un yoyo est constitué d'un grand disque de rayon  $R$  et d'un petit cylindre intérieur de rayon  $r < R$  (le moyeu), autour duquel s'enroule un fil fin d'épaisseur et de masse négligeables. L'autre extrémité du fil est attachée en un point fixe  $O$ . On admettra que : d'une part, le rayon du moyeu est suffisamment petit pour que le moment d'inertie du yoyo soit assimilable à celui du disque de rayon  $R$ ; d'autre part, le fil ainsi que la trajectoire du yoyo restent toujours verticaux.

A partir du formalisme lagrangien, déterminer la vitesse de descente du yoyo lorsque celui-ci est abandonné sans vitesse initiale.

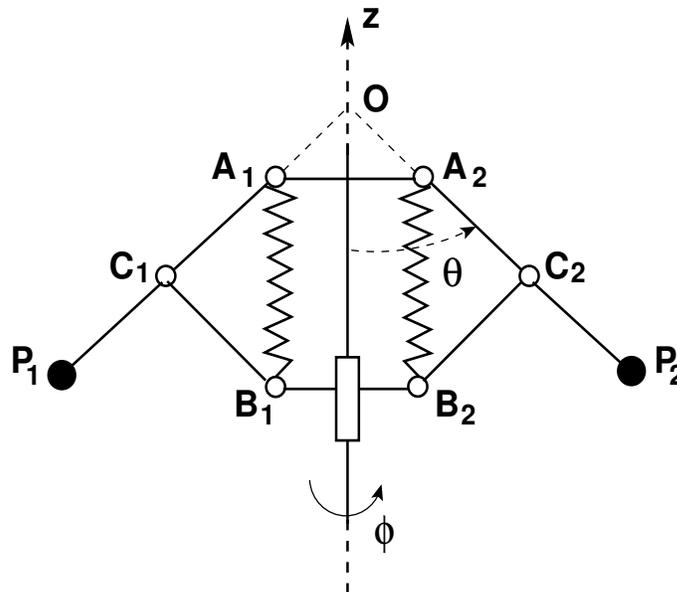
**III** - Une bille de masse  $m$ , assimilable à un point matériel  $M$  est astreinte à se déplacer le long d'un cerceau de rayon  $R$  et de centre  $O$  placé dans un plan vertical. On fait tourner l'ensemble autour du diamètre vertical  $Oz$  du cerceau avec une vitesse angulaire constante  $\omega$ . Le déplacement de la bille se fait sans frottement. On note  $\theta$  l'angle entre  $\vec{OM}$  et la verticale ascendante  $Oz$ .

1°) a) Définir pour la bille un Lagrangien utilisant  $\theta$  pour coordonnée généralisée.

b) En déduire l'équation d'évolution que doit satisfaire  $\theta$ .

2°) Existe-t-il des positions d'équilibre pour la bille dans le cerceau? Si oui, en discuter la stabilité suivant les valeurs de  $\omega$ .

#### IV - Régulateur de Watt



La figure ci-dessus représente le schéma très simplifié du régulateur de Watt. Il comporte un certain nombre de barres rigides dont on néglige les masses. Les deux sphères massives  $P_1$  et  $P_2$  sont assimilées à des points matériels de masse  $M$ . On a

$$OA_1 = OA_2 = a, \quad A_1C_1 = A_2C_2 = C_1P_1 = C_2P_2 = C_1B_1 = C_2B_2 = b$$

Le dispositif est complètement symétrique et possède deux degrés de liberté : l'un correspondant à une rotation d'angle  $\varphi$  autour de son axe vertical  $Oz$ , de vecteur unitaire  $\vec{e}_z$  (verticale ascendante), l'autre correspondant à une évolution de l'angle  $\theta$  entre  $OA_1$  (ou aussi bien  $OA_2$ ) et la verticale descendante. Entre les points  $A_1$  et  $B_1$  ainsi qu'entre les points  $A_2$  et  $B_2$  sont placés deux ressorts identiques de raideur  $K$  et de longueur au repos  $L < a$ . Comme les points  $A_1$  et  $A_2$ , les points  $B_1$  et  $B_2$  peuvent aussi s'écarter de la verticale

et de telle sorte que les ressorts restent toujours verticaux. Le point  $O$  reste immobile et le cylindre inférieur, solidaire de la partie basse  $B_1B_2$ , peut glisser sans frottement le long de  $Oz$ . Enfin, les points  $O, A_1, C_1, P_1$  restent toujours alignés, ainsi que les points  $O, A_2, C_2, P_2$ . Les barres  $C_1B_1$  et  $C_2B_2$  sont articulés en leurs extrémités par des liaisons rotules.

### - Partie I - Equilibre statique -

1°) a) Le référentiel  $R$  du laboratoire est supposé galiléen. Dans une première expérience, le régulateur de Watt y est supposé immobile dans le plan  $xOz$ , seul l'angle  $\theta$  peut varier. En prenant le point de vue que les ressorts font partie du monde extérieur au régulateur, répertorier les forces extérieures s'appliquant aux points  $A_1, A_2, B_1, B_2, P_1$  et  $P_2$ .

b) Pour une valeur donnée de  $\theta$ , exprimer les déplacements virtuels des points énumérés plus haut à l'aide de la seule variation  $\delta\theta$ .

c) Appliquer le principe des travaux virtuels pour trouver l'angle  $\theta_0$  correspondant à la position d'équilibre.

### - Partie II - Equilibre relatif -

2°) a) Dans une seconde expérience, le régulateur de Watt est en rotation uniforme de vitesse angulaire  $\omega$  autour de son axe  $Oz$ . Dans le référentiel tournant  $R'$  lié au dispositif, un nouvel équilibre s'est établi correspondant à un angle  $\theta'_0$ . En prenant le point de vue d'un observateur lié à ce référentiel tournant  $R'$ , répertorier les forces extérieures, réelles ou inertielles, s'appliquant aux points  $A_1, A_2, B_1, B_2, P_1$  et  $P_2$  à l'équilibre.

b) Appliquer ensuite dans  $R'$  le principe des travaux virtuels pour trouver l'angle  $\theta'_0$  correspondant à cet équilibre relatif.

### - Partie III - Equations d'Euler-Lagrange -

3°) a) On se place à nouveau dans le référentiel galiléen du laboratoire. Pour des variations quelconques de  $\phi$  et  $\theta$ , trouver les expressions des vitesses de  $P_1$  et  $P_2$  en fonction des données et de  $\dot{\phi}$  et  $\dot{\theta}$ .

b) En déduire l'énergie cinétique  $E_c$  du régulateur.

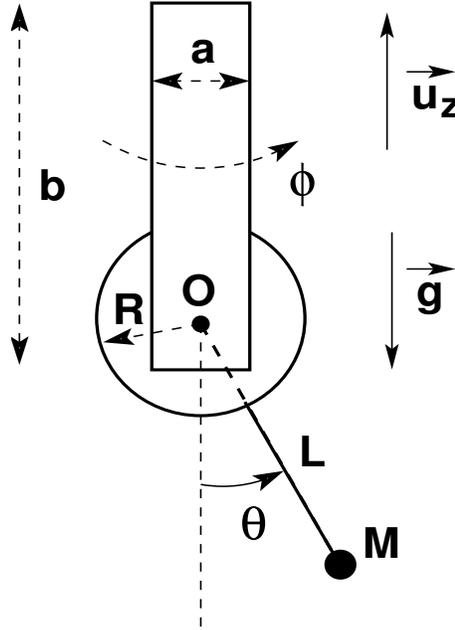
c) Quelle est l'énergie potentielle  $E_p$  du régulateur soumis à la gravitation terrestre et aux forces de rappel des ressorts ?

d) En déduire un Lagrangien  $\mathcal{L}(\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta})$  pour le régulateur.

4°) a) Ecrire les deux équations d'Euler-Lagrange relatives à  $\phi$  et à  $\theta$  et trouver deux constantes du mouvement (intégrales premières).

b) Imposer  $\dot{\phi} = \omega = \text{constante}$ , puis à partir de l'équation relative à  $\theta$ , retrouver la position d'équilibre du régulateur dans son référentiel tournant.

**V - Pendule tournante** Dans ce problème on étudie le comportement d'une pendule soumise à un mouvement de rotation autour son axe.



Le dispositif de la pendule tournante montré sur la figure ci-dessus est composé comme suit. Il comporte tout d'abord une gaine rectangulaire, de dimensions  $a$  (largeur) et  $b$  (hauteur), de masse  $m_1$ ; cette gaine peut tourner autour de son axe de symétrie confondu avec l'axe vertical ascendant  $Oz$  de vecteur unitaire  $\vec{u}_z$ ; l'angle de cette rotation est noté  $\varphi$ , et la vitesse angulaire correspondante est  $\omega = \dot{\varphi}$ .

Ensuite, en bas et à l'intérieur de la gaine, est fixé un disque d'épaisseur négligeable, de masse  $m_2$  et de rayon  $R$ , pouvant tourner sans frottement autour de son axe passant par son centre  $O$  et perpendiculaire au disque. L'angle de rotation du disque, compté à partir de l'axe  $-Oz$ , est noté  $\theta$ .

Enfin, une barre rigide de masse négligeable et de longueur  $L$  est soudée au disque. A son extrémité se trouve une masse  $M$  pouvant être considérée comme ponctuelle. On admettra que l'angle  $\theta$  est celui que fait la barre avec l'axe vertical descendant. Toutes les liaisons sont supposées sans frottement, et la seule force extérieure à considérer est celle de la pesanteur, d'accélération  $\vec{g} = -g \vec{u}_z$ . Le dispositif est suspendu de manière stable sur un bâti non représenté sur la figure. Il a donc deux degrés de liberté,  $\theta$  et  $\varphi$ .

Les vecteurs unitaires du repère du laboratoire étant  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$ , on notera

$$\vec{u}_x = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y, \quad \vec{u}_y = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y, \quad \vec{u}_z = \vec{e}_z$$

les vecteurs unitaires associés au repère tournant lié à la pendule.

## I - Calcul de moments d'inertie

1°) Trouver le moment d'inertie  $I_R$  d'un rectangle homogène d'épaisseur négligeable, de masse  $m_1$ , et de dimensions  $a$  (largeur) et  $b$  (hauteur), par rapport à l'axe vertical passant par son centre de masse (coincisant avec son centre de symétrie). Pour la suite, on notera que la gaine de la pendule est constituée de deux tels rectangles.

2°) Trouver les moments d'inertie  $I_1$  et  $I_2$  d'un disque homogène de d'épaisseur négligeable, de masse  $m_2$  et de rayon  $R$ .

## II - Mise en équations

3°) Trouver le vecteur vitesse instantanée de la masse  $M$  pour un angle  $\theta$  quelconque. On notera  $\ell = L + R$ .

4°) Trouver l'expression de l'énergie cinétique totale du système, ainsi que celle de l'énergie potentielle de la masse  $M$  due à la gravitation. En déduire le Lagrangien du système.

5°) Ecrire les deux équations d'Euler-Lagrange correspondant aux deux degrés de liberté.

6°) On impose  $\dot{\varphi} = \omega = \text{constante}$ . Montrer qu'il peut exister une position d'équilibre correspondant à une solution particulière  $\theta = \theta_0 = \text{constante}$  différente de 0 ou  $\pi$ .

## III - Petites oscillations et régime forcé

7°) On envisage une petite déviation à partir de cette position d'équilibre :

$$\theta = \theta_0 + \epsilon f(t)$$

où  $\epsilon \ll 1$ . En développant en série de Taylor par rapport au petit paramètre  $\epsilon$  tous les termes de l'équation d'Euler-Lagrange relative à  $\theta$  obtenue au 5°), trouver l'approximation linéaire de cette équation en ne gardant que les termes linéaires en  $\epsilon$ . Montrer que l'équation linéarisée obtenue a la même forme que celle d'un oscillateur harmonique. Trouver la pulsation  $\omega_0$  de la solution générale de cette équation.

8°) On suppose maintenant que l'équilibre est perturbé par une oscillation de pulsation  $\Omega$ , de telle sorte qu'à la place de  $\varphi = \omega t$  on a

$$\varphi = \omega t + \eta \sin \Omega t.$$

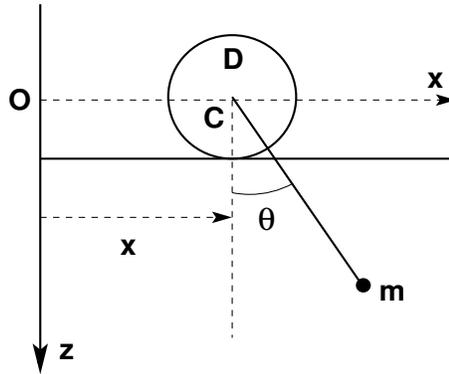
avec  $\eta \ll 1$ . On admet qu'à la suite de cette perturbation, l'angle  $\theta$  subit une déformation semblable et que l'on a

$$\theta(t) = \theta_0 + \eta [A \sin \Omega t + B \cos \Omega t]$$

Comme à la question précédente, linéariser l'équation relative à  $\theta$ . En déduire les expressions de  $A$  et de  $B$  en fonction des données du problème, notamment  $\Omega$  et  $\omega_0$ .

Solutions n° 7

**I - Disque roulant lié à un pendule simple**



1°)  $I = \mu \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 (r dr) = 2\pi h \mu \frac{R^4}{4} = (\mu\pi R^2 h) \frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2}$  ( $\mu$  est la masse volumique, supposée uniforme).

2°) a) A une variation  $dx$  de l'abscisse  $x$  de  $C$  correspond une rotation du disque d'un angle  $d\phi = -Rdx$ . La vitesse angulaire de rotation  $\dot{\phi}$  du disque est donc liée à sa vitesse de translation  $\dot{x}$  par  $\dot{\phi} = -R\dot{x}$ . Les coordonnées de  $m$  sont  $x_m = x + \ell \sin \theta$ ,  $z_m = \ell \cos \theta$  (verticale descendante), donc  $\dot{x}_m = \dot{x} + \ell \dot{\theta} \cos \theta$ ,  $\dot{z}_m = -\ell \dot{\theta} \sin \theta$ . L'énergie cinétique totale est

$$E_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m \left( [\dot{x} + \ell \dot{\theta} \cos \theta]^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{x}^2 \left( m + \frac{3M}{2} \right) + \frac{1}{2} m \left( \ell^2 \dot{\theta}^2 + 2 \ell \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta \right)$$

L'énergie potentielle de l'ensemble est celle de la masse  $m$  dans le champ de pesanteur terrestre :  $E_p = -mg\ell \cos \theta$ . On en déduit le Lagrangien du système

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 \left( m + \frac{3M}{2} \right) + \frac{1}{2} m \left( \ell^2 \dot{\theta}^2 + 2 \ell \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta \right) + mg\ell \cos \theta$$

b) L'abscisse  $x$  étant une variable cyclique, on en déduit l'invariance de

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x} \left( m + \frac{3M}{2} \right) + m \ell \dot{\theta} \cos \theta$$

Compte tenu des conditions initiales  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ , cette constante est nulle et l'on a

$$\dot{x} = -\frac{m\ell}{m + 3M/2} \dot{\theta} \cos \theta$$

c)  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] = \left[ -m\ell \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta - mg\ell \sin \theta \right] - \left[ m\ell^2 \ddot{\theta} + m\ell \ddot{x} \cos \theta - m\ell \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta \right] = 0$ ,  
d'où l'équation

$$\ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{\ell} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta, \quad \text{soit encore}$$

$$\frac{\ddot{\theta}}{m + 3M/2} [3M/2 + m(1 - \cos \theta)] + \frac{m\dot{\theta}^2 \sin \theta}{m + 3M/2} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta$$

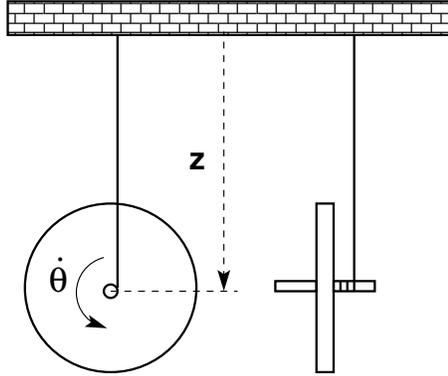
3°) Le cas des petites oscillations simplifie considérablement l'équation puisqu'alors  $\dot{x} \simeq -\frac{m\ell}{m + 3M/2} \dot{\theta}$ , et en ne prenant que les parties linéaires des termes on obtient ainsi l'équation simplifiée

$$\ddot{\theta} = -\Omega^2 \theta, \quad \text{avec} \quad \Omega = \sqrt{\frac{g}{\ell} \left( 1 + \frac{2m}{3M} \right)}$$

Compte tenu des conditions initiales, on trouve la loi horaire  $\theta(t) = \theta_0 \cos \Omega t$ . La vitesse angulaire de rotation du disque est alors donnée par

$$\dot{\varphi} = -\dot{x}/R = \frac{m\ell \dot{\theta}}{R(m + 3M/2)} = -\frac{m\ell \Omega \theta_0}{R(m + 3M/2)} \sin \Omega t$$

## II - Le Yoyo



On oriente la verticale suivant le sens descendant. La vitesse angulaire de rotation  $\dot{\theta}$  du disque est liée à sa vitesse de translation  $\dot{z}$  par  $\dot{\theta} = r\dot{z}$  où  $r$  est le rayon du moyeu. L'énergie cinétique du yoyo est donc  $E_c = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{z}^2$  où  $I = \frac{1}{2}MR^2$  est le moment d'inertie du disque par rapport à son axe de rotation. On a donc  $E_c = \frac{M}{2}\dot{z}^2 \left(1 + \frac{R^2}{2r^2}\right)$ . L'énergie potentielle est  $E_p = -Mgz$ , et le Lagrangien est

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2}\dot{z}^2 \left(1 + \frac{R^2}{2r^2}\right) + Mgz$$

L'équation d'évolution est donnée par

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right] = Mg - \ddot{z} \left(1 + \frac{R^2}{2r^2}\right) = 0$$

dont l'intégration, compte tenu des conditions initiales, conduit à

$$\dot{z} = \frac{gt}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}$$

## III - Bille dans un cerceau

1°) a)  $\vec{OM} = R \vec{e}_r = R \left[ \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \left( \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y \right) \right]$ ;  
 $\vec{v}_M = R \left[ -\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_z + \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_\rho + \omega \sin \theta \vec{e}_\phi \right]$ ;  $v_M^2 = R^2 \left[ \dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta \right]$ , d'où  $E_c = \frac{1}{2}mv_M^2 = \frac{1}{2}mR^2 \left[ \dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta \right]$ ;  $E_p = mgz = mgR \cos \theta$ , et enfin le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2 \left[ \dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta \right] - mgR \cos \theta$$

$$\text{b) } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] = m \sin \theta [\omega^2 R^2 \cos \theta + gR] - mR^2 \ddot{\theta} = 0, \text{ d'où}$$

$$\ddot{\theta} = \sin \theta [\omega^2 \cos \theta + gR]$$

2°) Il existe 2 ou 3 positions d'équilibre :  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$  et celle correspondant à  $\theta = \theta_e$  tel que  $\cos \theta = -\frac{gR}{\omega^2}$ , qui n'existe que si  $\omega^2 > gR$ .

On remarque immédiatement que l'équilibre à  $\theta = 0$  n'est jamais stable. En effet, pour les petits angles  $\theta$ , l'équation d'évolution est approximativement  $\ddot{\theta} \simeq K^2 \theta$  avec  $K = \sqrt{\omega^2 + gR}$ , ayant pour solution les fonctions hyperbolique  $\cosh Kt$  et  $\sinh Kt$  caractérisant un non-retour vers la position d'équilibre.

Au voisinage de  $\theta = \pi$ , on pose  $\theta = \pi - \alpha$  où  $\alpha$  est un petit angle dont l'équation d'évolution est  $\ddot{\alpha} \simeq \alpha [\omega^2 - gR]$ . Si  $\omega^2 > gR$ , les solutions sont de type hyperbolique et l'équilibre n'est pas stable. En revanche, si  $\omega^2 < gR$ , les solutions sont de type sinusoidal décrivant des oscillations autour d'un équilibre stable. L'équilibre est alors stable.

Lorsque  $\omega^2 > gR$ , les deux équilibres précédents sont instables. Un nouvel équilibre existe alors pour  $\theta = \theta_e$ . En son voisinage, posons  $\theta = \theta_e + \alpha$  où  $\alpha$  est un petit angle pour lequel on trouve l'équation d'évolution  $\ddot{\alpha} \simeq -\alpha \omega^2 \sin^2 \theta_e$  dont les solutions sont des fonctions sinusoidales de  $\omega \sin \theta_e t$  : l'équilibre est stable.

Ces conclusions peuvent aussi être obtenues en étudiant les variations de la fonction  $E'_p = mgR \cos \theta - \frac{1}{2} mR^2 \omega^2 \sin^2 \theta$  qui joue le rôle d'une énergie potentielle pour ce problème. On a

$$\frac{dE'_p}{d\theta} = -mgR \sin \theta - \frac{1}{2} mR^2 \omega^2 \sin 2\theta, \quad \frac{d^2 E'_p}{d\theta^2} = -mgR \cos \theta - mR^2 \omega^2 \cos 2\theta$$

$$\frac{d^2 E'_p}{d\theta^2}(0) = -mgR - mR^2 \omega^2 < 0, \quad \frac{d^2 E'_p}{d\theta^2}(\pi) = mR^2 \left[ \frac{g}{R} - \omega^2 \right]$$

$$\text{et pour } \omega^2 > g/R, \quad \frac{d^2 E'_p}{d\theta^2}(\theta_e) = \frac{mR^2}{\omega^2} \left[ \omega^4 - \frac{g^2}{R^2} \right] > 0$$

**Remarque** Pour de grandes vitesses de rotation, ce type de système peut servir de régulateur en le couplant par exemple à une soupape...

### III - Régulateur de Watt

$$1^\circ) \text{ a) } \vec{F}_{A_1} = -K(A_1B_1 - L) \vec{e}_z = -\vec{F}_{B_1}; \vec{F}_{A_2} = -K(A_2B_2 - L) \vec{e}_z = -\vec{F}_{B_2};$$

$$\vec{F}_{P_1} = \vec{F}_{P_2} = -Mg \vec{e}_z.$$

$$\text{b) } \delta\vec{OA}_2 = a\delta\theta (\sin\theta \vec{e}_z + \cos\theta \vec{e}_x); \delta\vec{OB}_2 = \delta\theta [(a+2b)\sin\theta \vec{e}_z + a\cos\theta \vec{e}_x];$$

$$\delta\vec{OP}_2 = \delta\theta(a+2b) [\sin\theta \vec{e}_z + \cos\theta \vec{e}_x].$$

$$\text{c) } \sum_i \vec{F}_{\text{ext}i} \cdot \vec{\delta r}_i = 2\delta\theta [-(a+2b)Mg\sin\theta + 2Kb\sin\theta(A_2B_2 - L)] = 0$$

où le facteur 2 vient de la symétrie du dispositif. Comme  $A_2B_2 = 2b\cos\theta$ , il vient finalement

$$\cos\theta_0 = \frac{(a+2b)Mg + 2KbL}{4Kb^2}$$

2°) a) En plus des forces répertoriées dans le 1°), apparaissent dans  $R'$  des forces inertielles d'entraînement (les forces de Coriolis sont nulles à l'équilibre dans  $R'$ ), s'appliquant aux seuls points massifs  $P_1$  et  $P_2$ , à savoir,  $\vec{f}_{P_1} = M\omega^2 \vec{HP}_1$ ,  $\vec{f}_{P_2} = M\omega^2 \vec{HP}_2$ , le point  $H$  étant le projeté commun sur  $Oz$  de  $P_1$  et  $P_2$ . Explicitement,  $\vec{HP}_2 = (a+2b)\sin\theta(\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y)$ .

b) Par rapport au 1°) c), il faut inclure dans l'équation le terme supplémentaire

$$2M\omega^2 \vec{HP}_2 \cdot \delta\vec{OP}_2 = (a+2b)^2 M\omega^2 \sin\theta \cos\theta \delta\theta$$

ce qui donne finalement

$$\cos\theta'_0 = \frac{(a+2b)Mg + 2KbL}{(a+2b)^2 M\omega^2 + 4Kb^2}$$

3°) a)

$$\vec{V}_{P_2} = (a+2b) \left[ \dot{\theta} (\sin\theta \vec{e}_z + \cos\theta(\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y)) + \dot{\varphi} \sin\theta (-\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y) \right]$$

$$\text{b) } E_c = 2\frac{1}{2}MV_{P_2}^2 = M(a+2b)^2 [\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta].$$

$$\text{c) } E_p = -2(a+2b)Mg\cos\theta + K(2b\cos\theta - L)^2.$$

$$\text{d) } \mathcal{L} = E_c - E_p = M(a+2b)^2 [\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta] + 2(a+2b)Mg\cos\theta - K(2b\cos\theta - L)^2.$$

4°) a) La variable  $\varphi$  est cyclique, donc  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = 2M(a+2b)^2\dot{\varphi}\sin^2\theta$  est une constante. La seconde constante est l'énergie  $E = E_c + E_p$  car toutes les forces en jeu sont conservatives.

b) On a

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 2M(a+2b)^2 \ddot{\theta} - 2 \sin \theta [M(a+2b)^2 \dot{\varphi}^2 \cos \theta - Mg(a+2b) + 2Kb(2b \cos \theta - L)] = 0$$

Pour  $\dot{\varphi} = \omega = \text{constante}$ , l'équation ci-dessus prévoit bien un équilibre ( $\ddot{\theta} = 0$ ) pour  $\theta = \theta'_0$ .

### Remarques

- L'équilibre relatif à  $\theta = \theta'_0$  n'existe bien sûr que si la valeur trouvée pour  $\cos \theta'_0$  est bien inférieure à 1, ce qui nécessite une vitesse angulaire suffisamment grande.
- L'utilisation de ce dispositif en régulateur repose sur la constance de son impulsion  $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$ , d'où résulte la constance de  $\dot{\varphi} \sin^2 \theta$ , conduisant à des variations en sens inverses de  $\dot{\varphi}$  et  $\theta$ .

## III - Pendule tournante

### I - Calcul de moments d'inertie

1°) On note  $\mu = m_1/(ab)$  la densité superficielle de masse, supposée constante. On a

$$I_R = \mu \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx = \frac{\mu ab}{12} a^2 = \frac{m_1 a^2}{12}$$

2°) On note  $\mu' = m_2/(\pi R^2)$ . On a

$$I_1 = \mu' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^2}{2} R^2 = \frac{m_2 R^2}{2}$$

$$I_2 = \mu' \iint_{x^2+z^2 \leq R^2} x^2 dx dz = \mu' \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{m_2 R^2}{4}$$

$$3^\circ) \vec{V}_M = \ell \left[ \dot{\theta} \vec{u}_z + \dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_x + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_y \right].$$

$$4^\circ) E_c = 2 \frac{1}{2} I_R \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} [I_1 \dot{\theta}^2 + I_2 \dot{\varphi}^2] + \frac{1}{2} M \ell^2 [\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta], \text{ soit}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 [M \ell^2 + I_1] + \frac{1}{2} [2I_R + I_2 + M \ell^2 \sin^2 \theta]; E_p = -Mg \ell \cos \theta.$$

$$\mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 [M \ell^2 + I_1] + \frac{1}{2} [2I_R + I_2 + M \ell^2 \sin^2 \theta] + Mg \ell \cos \theta.$$

$$5^\circ) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} [2I_R + I_2 + M \ell^2 \sin^2 \theta] = \text{constante.}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \ddot{\theta} [M\ell^2 + I_1] + \sin \theta M\ell [g - \ell \dot{\varphi}^2 \cos \theta] = 0$$

6°)  $\cos \theta_0 = \frac{g}{\ell \omega^2}$ , si  $\omega^2 > \frac{g}{\ell}$ .

7°) On trouve  $\ddot{f} = -\omega_0^2 f$  avec  $\omega_0 = \omega \sin \theta_0 \sqrt{\frac{M\ell^2}{M\ell^2 + I_1}}$

8°) Posant  $\theta = \theta_0 + \eta f$ , on trouve

$$\ddot{f} = -\omega_0^2 + \frac{M\ell^2 \omega \sin 2\theta_0}{M\ell^2 + I_1} \Omega \cos \Omega t$$

d'où l'on tire  $A = 0$ ,  $B = \frac{M\ell^2 \omega \Omega \sin 2\theta_0}{(M\ell^2 + I_1)(\omega_0^2 - \Omega^2)}$ .

## Exercices n° 8

### - Lagrangiens V -

**I - Ellipsoïde** - Dans un repère cartésien  $(O, x, y, z)$ , on considère un corps solide homogène de masse  $M$ , ayant la forme d'un ellipsoïde dont la surface est définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

1°) Calculer le volume de ce corps. Pour faire ce calcul, il est recommandé d'effectuer le changement de variables

$$x' = \frac{x}{a} \quad , \quad y' = \frac{y}{b} \quad , \quad z' = \frac{z}{c}$$

2°) Calculer le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe  $Oz$ . En déduire les moments d'inertie du corps par rapport aux axes  $Ox$  et  $Oy$  respectivement.

**II - Toupie** - On considère une toupie, faite d'un matériau homogène et ayant la forme d'un ellipsoïde de révolution autour d'un axe  $\Delta$ . Soit  $\mathcal{R}'(G, x', y', z')$  un repère lié à la toupie, dont l'origine  $G$  est le centre de gravité de la toupie et dont l'axe  $Gz'$  est son axe de révolution  $\Delta$ . Dans ce repère, l'équation de la surface de la toupie est

$$\frac{x'^2 + y'^2}{a^2} + \frac{z'^2}{b^2} = 1$$

Les vecteurs unitaires de  $\mathcal{R}'$  seront notés  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ . On envisage des mouvements de la toupie autour de l'un de ses points  $P$ , supposé fixe, et dont les coordonnées dans  $\mathcal{R}'$  sont  $(0, 0, -b)$ . Au point  $P$  sera attaché un repère fixe  $\mathcal{R}(P, x, y, z)$ , de vecteurs unitaires  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ,  $Pz$  étant suivant la verticale ascendante. Dans  $\mathcal{R}$ , les vecteurs de base de  $\mathcal{R}'$  ont pour expressions

$$\vec{u}_x = \cos \varphi \vec{e}_\theta + \sin \varphi \vec{e}_\psi \quad , \quad \vec{u}_y = -\sin \varphi \vec{e}_\theta + \cos \varphi \vec{e}_\psi \quad , \quad \vec{u}_z = \vec{e}_r$$

où

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \vec{e}_\rho \quad , \quad \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_z + \cos \theta \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\rho &= \cos \psi \vec{e}_x + \sin \psi \vec{e}_y \quad , \quad \vec{e}_\psi = -\sin \psi \vec{e}_x + \cos \psi \vec{e}_y \end{aligned}$$

1°) Montrer que le vecteur rotation instantanée gouvernant l'évolution des angles  $\theta$ ,  $\psi$  et  $\varphi$  au cours du temps est donné par

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\psi + \dot{\varphi} \vec{u}_z$$

et interpréter chacun des termes.

2°) a) Soit  $\vec{v}$  le vecteur vitesse d'un point  $M$  quelconque de la toupie relativement à  $\mathcal{R}$ . Exprimer les composantes cartésiennes de ce vecteur dans la base de  $\mathcal{R}'$ , en fonction des coordonnées cartésiennes  $x', y', z'$  de  $M$  dans ce même repère.

b) Montrer que l'énergie cinétique totale  $E_c$  de la toupie a pour expression

$$E_c = \frac{1}{2}I (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2}J\omega_z^2$$

où

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \quad , \quad \omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \quad , \quad I = M \left( b^2 + \frac{a^2 + b^2}{5} \right) \quad , \quad J = \frac{2Ma^2}{5}$$

Pour obtenir ce résultat, on tiendra compte des symétries de la forme de la toupie qui ont pour conséquence que

$$\int_{\mathcal{V}} dx' dy' dz' x' y' = \int_{\mathcal{V}} dx' dy' dz' y' z' = \int_{\mathcal{V}} dx' dy' dz' z' x' = 0, \quad \int_{\mathcal{V}} dx' dy' dz' (x', y', z') = 0$$

l'intégration portant sur tout le volume  $\mathcal{V}$  de la toupie.

3°) a) Définir le Lagrangien de la toupie, dépendant des trois coordonnées généralisées  $\theta$ ,  $\psi$  et  $\varphi$ .

b) Ecrire les équations d'Euler-Lagrange relative à chacune des coordonnées et en déduire l'existence de deux constantes (intégrales premières) du mouvement :

$$C_1 = J (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \quad , \quad C_2 = I \dot{\psi} \sin^2 \theta + J \cos \theta (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)$$

c) En déduire les expressions de  $\dot{\varphi}$  et  $\dot{\psi}$  en fonction de ces constantes et de  $\theta$ .

4°) a) On cherche si ces équations admettent une solution pour laquelle  $\theta$  reste constant et égal à  $\theta_0 \neq 0$ . Montrer que dans ce cas  $\dot{\varphi}$  et  $\dot{\psi}$  restent constants et que  $\dot{\psi}$  doit être égal à

$$\dot{\psi} = \frac{C_1}{2I \cos \theta_0} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4MgbI \cos \theta_0}{C_1^2}} \right]$$

b) L'approximation dite "gyroscopique" consiste à considérer que la vitesse angulaire de rotation propre  $\dot{\varphi} = \omega$  est grande devant toutes les autres vitesses angulaires. Montrer que l'on peut alors écrire

$$C_1 \approx J\omega, \quad C_2 \approx J\omega \cos \theta_0$$

et que l'on obtient

$$\dot{\psi} \approx \frac{Mgb}{J\omega}$$

c) Décrire alors le mouvement de la toupie et calculer numériquement, en tour par seconde, la vitesse angulaire de *précession*  $\dot{\psi}$  pour  $b = 15$  cm,  $a = 9$  cm,  $\omega = 23\pi$  rd/s,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>.

**III - Précession des équinoxes** - On désigne par *précession des équinoxes* le lent changement d'orientation de l'axe de rotation propre de la Terre au cours du temps. Il y a plusieurs causes à ce phénomène. En premier lieu, du fait de sa rotation propre et de sa constitution interne, la Terre a pris la forme d'un ellipsoïde de révolution autour de son axe de rotation, avec un renflement équatorial et un aplatissement aux pôles. De plus, l'axe des pôles est incliné d'un angle  $\theta$  par rapport à la normale au plan de l'écliptique (plan de la trajectoire autour du Soleil). Le Soleil, ainsi que la Lune, exercent sur le bourrelet équatorial un couple de forces qui tend à faire coïncider le plan équatorial avec le plan de l'écliptique. Le mouvement de précession résulte de cette action.

On montre que, du fait de la non-sphéricité de la Terre, l'énergie potentielle de la Terre décrivant son interaction avec le Soleil et la Lune doit être corrigée par le terme

$$V(\theta) = \frac{3}{4}(J - I) \sin^2 \theta \Omega_s^2 (1 + K)$$

qui dépend explicitement de  $\theta$ . Dans cette expression,

- $\Omega_s$  est la vitesse angulaire moyenne de rotation de la Terre autour du Soleil ;
- $K = \frac{M_L}{M_S} \left( \frac{r_S}{r_L} \right)^3$  où  $M_L$  et  $M_S$  sont les masses de la Lune et du Soleil respectivement, et  $r_L$  et  $r_S$  les distances moyennes de la Terre à la Lune et au Soleil respectivement ;
- $J$  est le moment d'inertie de la Terre par rapport à son axe de rotation, et  $I$  son moment d'inertie par rapport à un diamètre équatorial.

En exploitant la formule établie à l'exercice **V** pour la vitesse angulaire de précession dans l'approximation gyroscopique, calculer numériquement, en années, la période de précession des équinoxes avec les données suivantes :

$$M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}; \quad M_L = 7,36 \cdot 10^{22} \text{ kg}; \quad r_S = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}; \quad r_L = 384403 \text{ km}; \quad \frac{J}{J - I} = 306; \quad \theta = 23^\circ,5.$$

**Solutions n° 8**

**I - Ellipsoïde**

$$1^\circ) V = abc \iiint_{S(O,1)} dx' dy' dz' = \frac{4\pi}{3} abc.$$

$$2^\circ) I_z = abc\mu \iiint_{S(O,1)} [a^2 x'^2 + b^2 y'^2] dx' dy' dz' =$$

$$abc\mu \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} [a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi] d\phi. \text{ Comme } \int_0^1 r^4 dr = 1/5,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos^2 \phi + \sin^2 \phi] d\phi = \pi$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi [\sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta] d\theta = \left[ -\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

on obtient ( $M = \mu V$ )

$$I_z = \frac{M}{5} (a^2 + b^2), \text{ puis, par permutations, } I_x = \frac{M}{5} (b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{M}{5} (c^2 + a^2)$$

**II - Toupie**

$$1^\circ) \frac{d\vec{u}_x}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_x = -\omega_y \vec{u}_z + \omega_z \vec{u}_y = \dot{\varphi} \vec{u}_y + \cos \varphi \left[ -\dot{\theta} \vec{e}_r + \cos \theta \dot{\psi} \vec{e}_\psi \right] - \dot{\psi} \sin \varphi \vec{e}_\rho.$$

On en déduit

$$\omega_y = - \vec{u}_z \cdot \frac{d\vec{u}_x}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_z \cdot \vec{e}_r + \dot{\psi} \sin \varphi \vec{u}_z \cdot \vec{e}_\rho = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta$$

$$\omega_z = \vec{u}_y \cdot \frac{d\vec{u}_x}{dt} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta \vec{u}_y \cdot \vec{e}_\psi - \dot{\psi} \sin \varphi \vec{u}_y \cdot \vec{e}_\rho = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta$$

Puis,  $\omega_x = - \vec{u}_y \cdot \frac{d\vec{u}_z}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_y \cdot \vec{e}_\theta - \dot{\psi} \sin \theta \vec{u}_y \cdot \vec{e}_\psi$ , soit  $\omega_x = \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi$ .

Le vecteur rotation instantanée s'écrit donc comme

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{u}_x + \omega_y \vec{u}_y + \omega_z \vec{u}_z = \dot{\psi} \left[ -\sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \sin \theta \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z \right]$$

$$+ \dot{\theta} \left[ \sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y \right] + \dot{\varphi} \vec{u}_z, \text{ soit finalement,}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\psi + \dot{\varphi} \vec{u}_z$$

où chacun des termes est de la forme  $\dot{\xi} \vec{N}_\xi$ ,  $\dot{\xi}$  étant une vitesse angulaire d'une rotation autour d'un axe dont la direction est définie par le vecteur unitaire  $\vec{N}_\xi$ .

2°) a)  $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{PM}$ , avec  $\vec{PM} = \vec{PG} + \vec{GM} = x' \vec{u}_x + y' \vec{u}_y + (z' - b) \vec{u}_z$ , donc

$$v_x = \omega_y(z' - b) - \omega_z y', \quad v_y = \omega_z x' - \omega_x(z' - b), \quad v_z = \omega_x y' - \omega_y x'$$

b) Notons  $\mu$  la masse volumique du corps solide. On a  $E_c = \frac{\mu}{2} \int_{\mathcal{V}} v^2 d\mathcal{V}$ . Compte tenu des symétries du corps, on a

$$\int_{\mathcal{V}} v^2 d\mathcal{V} = \omega_x^2 \int_{\mathcal{V}} [y'^2 + z'^2 + b^2] d\mathcal{V} + \omega_y^2 \int_{\mathcal{V}} [z'^2 + b^2 + x'^2] d\mathcal{V} + \omega_z^2 \int_{\mathcal{V}} [x'^2 + y'^2] d\mathcal{V}$$

De plus,  $\int_{\mathcal{V}} x'^2 d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} y'^2 d\mathcal{V}$ , doù  $\mu \int_{\mathcal{V}} v^2 d\mathcal{V} = I(\omega_x^2 + \omega_y^2) + J\omega_z^2$ , avec<sup>1</sup>

$$I = \mu \int_{\mathcal{V}} [z'^2 + b^2 + x'^2] d\mathcal{V} = Mb^2 + \mu \int_{\mathcal{V}} [z'^2 + x'^2] d\mathcal{V} = M \left[ b^2 + \frac{a^2 + b^2}{5} \right], \quad \text{et}$$

$$J = \mu \int_{\mathcal{V}} [x'^2 + y'^2] d\mathcal{V} = \frac{2Ma^2}{5}$$

L'énergie cinétique totale  $E_c$  de la toupie s'écrit donc

$$E_c = \frac{1}{2} I (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2} J \omega_z^2$$

avec  $\omega_x^2 + \omega_y^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta$ , et  $\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta$ .

3°) a)  $\mathcal{L} = E_c - Mgb \cos \theta$ .

b) Les variables  $\varphi$  et  $\psi$  étant cycliques, les deux grandeurs suivantes sont des constantes du mouvement :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = J [\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta] = C_1, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I \dot{\psi} \sin^2 \theta + J \cos \theta [\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta] = C_2$$

c)  $\dot{\psi} = \frac{C_2 - C_1 \cos \theta}{I \sin^2 \theta}$ ,  $\dot{\varphi} = \frac{1}{IJ \sin^2 \theta} [C_1 (I \sin^2 \theta + J \cos^2 \theta) - C_2 J \cos \theta]$ .

1. Voir l'exercice précédent sur l'ellipsoïde.

4°) a) L'équation d'évolution relative à  $\theta$  est

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = I\ddot{\theta} + Mgb \sin \theta + I\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta - J \sin \theta \dot{\psi} (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = 0$$

Si  $\theta$  est constant et égal à  $\theta_0 \neq 0$ , cette équation conduit à cette autre équation

$$I\dot{\psi}^2 \cos \theta_0 - C_1 \dot{\psi} + Mgb = 0$$

donnant pour  $\dot{\psi}$  une valeur constante

$$\dot{\psi} = \frac{C_1}{2I \cos \theta_0} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4MgbI \cos \theta_0}{C_1^2}} \right]$$

et aussi une valeur constante pour  $\dot{\varphi}$ , puisque  $J [\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta] = C_1$  est constant.

b) Dans l'approximation "gyroscopique", on obtient  $C_1 \approx J\omega$ ,  $C_2 \approx J\omega \cos \theta_0$ , et par un développement limité,  $\dot{\psi} \approx \frac{Mgb}{J\omega}$ .

c) On a  $\dot{\psi} \cos \theta_0 =$  constante indépendante de  $\theta_0$  : une augmentation de  $\theta_0$  provoque une augmentation de  $\dot{\psi}$ .

A.N. :  $\dot{\psi} = 1$  tour/s.

### III - Précession des équinoxes

En utilisant les résultats de l'exercice de la toupie, l'énergie potentielle  $Mgb \cos \theta$  doit être remplacé ici par  $V(\theta)$ , et dans l'équation d'évolution de  $\theta$ . le terme  $+Mgb \sin \theta$  doit donc être remplacé par  $\frac{3}{2}(J-I) \sin \theta \cos \theta \Omega_s^2 (1+K)$ , et finalement, dans l'expression de  $\dot{\psi}$  déduite dans l'approximation gyroscopique, le terme  $Mgb$  est remplacé par  $-\frac{3}{2}(J-I) \cos \theta \Omega_s^2 (1+K)$ . On en déduit ainsi, pour le cas présent,

$$\dot{\psi} \simeq -\frac{3}{2} \frac{(J-I)}{J\omega} \cos \theta \Omega_s^2 (1+K)$$

La période de précession est  $T_p = \frac{2\pi}{|\dot{\psi}|}$ , soit, puisque  $T_T = 2\pi/\Omega_T = 1$  année,  $T = 2\pi/\omega = T_T/365$ ,

$$\frac{T_p}{T_T} = \frac{2}{3} \times 365 \times \frac{J}{J-I} \times \frac{1}{\cos \theta (1+K)}$$

A.N.  $T_p \simeq 25500$  années.

## Exercices n° 9

### - Hamiltoniens et transformations canoniques I -

**I - Chute libre** - Trouver le Hamiltonien pour un point matériel de masse  $m$  soumis à la seule action de la pesanteur terrestre.

**II - Bille dans un cerceau en rotation** - Une bille de masse  $m$ , assimilable à un point matériel  $M$ , est astreinte à se déplacer le long d'un cerceau de rayon  $R$  et de centre  $O$  placé dans un plan vertical. On fait tourner l'ensemble autour du diamètre vertical  $Oz$  avec une vitesse angulaire constante  $\omega$ . L'angle  $\theta$  entre  $\vec{OM}$  et la verticale ascendante  $Oz$  est utilisé comme coordonnée généralisée.

1°) Définir le Hamiltonien de la bille et montrer qu'il constitue une intégrale première du mouvement de la bille.

2°) En déduire l'équation d'évolution que doit satisfaire  $\theta$ .

3°) A partir du Hamiltonien, déduire les éventuelles positions d'équilibre de la bille et étudier leurs stabilités suivant les valeurs de  $\omega$ .

4°) Comparer ce Hamiltonien à ce que l'on définit comme étant l'énergie mécanique  $E$  de la bille. Cette dernière grandeur est-elle ou non conservée? Expliquer la réponse.

**III - Oscillateur harmonique à une dimension** - On considère un oscillateur harmonique à une dimension, dont l'équation du mouvement est

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Son Lagrangien est donné par

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

1°) Définir l'impulsion canonique  $p$ , puis trouver le Hamiltonien de l'oscillateur en fonction de  $p$  et  $x$ .

2°) Ecrire le système d'équations canoniques.

3°) On introduit deux nouvelles variables  $P$  et  $Q$  par la transformation

$$p = \sqrt{2\lambda P} \cos Q, \quad x = \sqrt{\frac{2P}{\lambda}} \sin Q$$

où  $\lambda$  est une constante. Prouver qu'il s'agit d'une transformation canonique en évaluant les crochets de Poisson entre les variables  $p$  et  $x$  par rapport aux nouvelles variables  $P$  et  $Q$ .

4°) Exprimer le nouveau Hamiltonien  $H'(P, Q) = H(p(P, Q), x(P, Q))$  comme fonction des nouvelles variables  $P$  et  $Q$ . Trouver la valeur particulière à donner au paramètre  $\lambda$  pour que l'on ait  $H' = \omega P$  où  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

5°) Ecrire alors les équations canoniques relatives aux nouvelles variables  $P$  et  $Q$  et les intégrer. Ceci fait, revenir aux anciennes variables  $p$  et  $x$  et retrouver la solution classique bien connue.

6°) On définit une autre transformation  $(p, x) \rightarrow (P, Q)$  par les relations

$$P = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}, \quad \tan(\omega Q) = \sqrt{mk} \frac{x}{p}$$

où  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

a) En calculant les crochets de Poisson de  $P$  et  $Q$  par rapport aux variables  $p$  et  $x$ , vérifier qu'il s'agit d'une transformation canonique.

b) Expliciter les équations de Hamilton avec  $P$  et  $Q$  et les intégrer pour trouver  $P(t)$  et  $Q(t)$ , puis  $p(t)$  et  $x(t)$ .

**IV - Oscillateur harmonique à deux dimensions** - Le Lagrangien d'un oscillateur harmonique à deux dimensions est donné par

$$\mathcal{L} = m \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - k \frac{x^2 + y^2}{2}$$

1°) Définir les impulsions généralisées  $p_x$  et  $p_y$  et le Hamiltonien  $H$  correspondant en fonction de  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $x$  et  $y$ .

2°) Prouver que la transformation

$$p_x = \sqrt{2\lambda P_1} \cos Q_1, \quad x = \sqrt{\frac{2P_1}{\lambda}} \sin Q_1, \quad p_y = \sqrt{2\lambda P_2} \cos Q_2, \quad y = \sqrt{\frac{2P_2}{\lambda}} \sin Q_2$$

où  $\lambda = \sqrt{km}$  est bien une transformation canonique.

3°) En remplaçant dans  $H$  ces expressions de  $x$ ,  $y$ ,  $p_x$ ,  $p_y$  en fonction des nouvelles variables, trouver la nouvelle forme  $H(P_1, P_2, Q_1, Q_2)$  du Hamiltonien et écrire les équations canoniques pour les nouvelles variables. Montrer que la combinaison  $Q_1 - Q_2$  est une constante du mouvement.

## V - Transformation canonique I -

On rappelle l'équivalence entre deux définitions d'une transformation canonique :

- c'est une transformation  $(p, q) \rightarrow (P, Q)$  pour laquelle les équations canoniques gardent la même forme :

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} = -\dot{P}_i, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} = \dot{Q}_i$$

$\tilde{H}$  étant le Hamiltonien transformé;

- c'est une transformation qui conserve les crochets de Poisson des variables canoniques :

$$\{P_i, P_k\} = 0, \quad \{Q_i, Q_k\} = 0, \quad \{P_i, Q_k\} = \delta_{ik}$$

On considère le Hamiltonien

$$H = p_1^2 + p_2^2 + \frac{\lambda_1^2}{8} (q_1 - q_2)^2 + \frac{\lambda_2^2}{8} (q_1 + q_2)^2$$

où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont deux constantes réelles positives, et la transformation définie par

$$q_1 = \sqrt{\frac{2Q_1}{\lambda_1}} \cos P_1 + \sqrt{\frac{2Q_2}{\lambda_2}} \cos P_2, \quad q_2 = -\sqrt{\frac{2Q_1}{\lambda_1}} \cos P_1 + \sqrt{\frac{2Q_2}{\lambda_2}} \cos P_2$$
$$p_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 Q_1}{2}} \sin P_1 + \sqrt{\frac{\lambda_2 Q_2}{2}} \sin P_2, \quad p_2 = -\sqrt{\frac{\lambda_1 Q_1}{2}} \sin P_1 + \sqrt{\frac{\lambda_2 Q_2}{2}} \sin P_2$$

1°) Vérifier qu'il s'agit bien d'une transformation canonique en évaluant les crochets de Poisson entre les variables  $p, q$ , les relations canoniques entre les variables  $P, Q$  étant supposées réalisées.

2°) Trouver la nouvelle fonction de Hamilton  $\tilde{H}(P, Q) = H(p(P, Q), q(P, Q))$ . Ecrire les équations de Hamilton en coordonnées  $P, Q$  et intégrer le système.

## VI - Transformation canonique II -

On considère la fonction de Hamilton suivante, dépendant d'une seule coordonnée  $q$  et d'une seule impulsion  $p$  :

$$H = 2p^2 - 4pq^2 + q + 2q^4$$

1°) Ecrire les équations de Hamilton, sans chercher à les résoudre...

2°) On introduit de nouvelles variables  $P$  et  $Q$ , suivant les formules :

$$P = p - q^2, \quad Q = q + (p - q^2)^2$$

a) Vérifier que l'expression

$$\tilde{H} = P^2 + Q$$

coïncide avec le Hamiltonien  $H$  après la substitution de  $P$  et de  $Q$ .

b) Vérifier, à l'aide des crochets de Poisson entre les nouvelles variables, qu'il s'agit d'une transformation canonique.

3°) Ecrire les équations de Hamilton dans les nouvelles coordonnées canoniques. Trouver la solution explicite  $P(t)$  et  $Q(t)$ , vérifiant les conditions initiales  $P(0) = 0$ ,  $Q(0) = 0$ .

4°) Trouver la transformation inverse et déterminer les fonctions  $p(t)$  et  $q(t)$ .

## VII - Transformation canonique III -

Considérons le Lagrangien de l'oscillateur harmonique

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

1°) Définir l'impulsion  $p$ , le Hamiltonien  $H(x, p)$  et les équations canoniques correspondant à ce Lagrangien.

2°) On introduit la fonction génératrice suivante

$$F(x, Q) = \frac{m\omega x^2 \cos Q}{2 \sin Q}$$

Grâce aux équations

$$p = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q},$$

expliciter les variables  $(x, p)$  en fonction des variables  $(Q, P)$ . Pourquoi le nouveau Hamiltonien  $H'(Q, P)$  est-il tel que  $H'(Q, P) = H(x(Q, P), p(Q, P))$ ? L'expliciter.

3°) Définir les crochets de Poisson par rapport aux nouvelles variables. Quel doit être le crochet de Poisson entre  $x$  et  $p$  par rapport aux nouvelles variables  $(Q, P)$  afin que la transformation soit canonique? Vérifiez que c'est bien le cas ici.

4°) Ecrire les équations canoniques de Hamilton avec le nouveau Hamiltonien et les nouvelles variables  $Q$  et  $P$ . Intégrer ces équations puis revenir aux anciennes variables pour déterminer les fonctions  $x(t)$  et  $p(t)$ .

## VIII - Mouvement libre et mouvements astreints d'une barre

### - Partie I -

On considère le mouvement dans un plan vertical  $xOz$  d'une barre homogène de masse  $M$  et de longueur  $L$ , rigide et supposée très fine (épaisseur nulle). La position et l'orientation instantanées de la barre sont déterminées par l'abscisse  $x(t)$  et la cote  $z(t)$  de son centre  $C$  (qui est aussi son centre de masse) et de l'angle  $\theta(t)$  que fait la barre avec la verticale descendante  $-Oz$ .

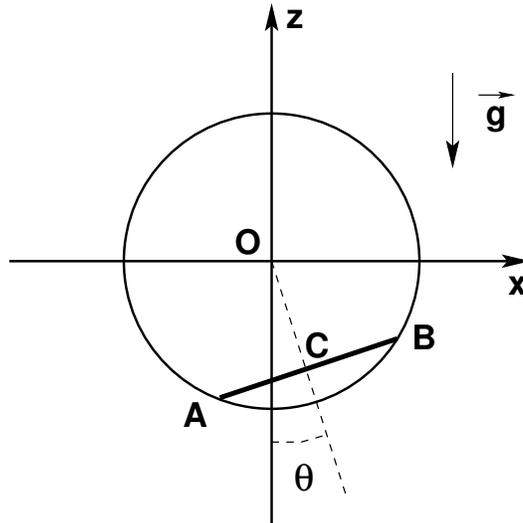
1°) Calculer le moment d'inertie  $I$  de la barre par rapport à un axe qui lui est perpendiculaire et qui passe par son centre.

2°) On envisage tout d'abord le mouvement sans contrainte de la barre dans le plan  $xOz$ .

a) Donner les expressions de l'énergie cinétique totale  $E_c$  de la barre et de son énergie potentielle de pesanteur  $E_p$ . En déduire son Lagrangien "sans contrainte"  $\mathcal{L}$ .

b) Ecrire les trois équations d'Euler-Lagrange relatives aux trois variables  $x$ ,  $z$  et  $\theta$ . Résoudre ces équations et décrire le mouvement général libre de la barre.

### - Partie II -



Dans cette partie, on étudie le mouvement de la barre astreinte à évoluer de telle sorte que ses extrémités  $A$  et  $B$  glissent sans frottement sur un rail fixe en forme de cercle vertical de centre  $O$  et de rayon  $R > L/2$  (voir figure). On note  $D = OC$ . On se propose de trouver les équations de son mouvement contraint par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Par rapport au mouvement sans contrainte, il faut ici tenir compte de deux conditions supplémentaires liant les coordonnées

$$f_1(x, z, \theta) = x - D \sin \theta = 0, \quad f_2(x, z, \theta) = z + D \cos \theta = 0 \quad (7)$$

qui sont une façon d'exprimer que seule la variable  $\theta$  est indépendante et détermine les valeurs des autres variables  $x$  et  $z$ . On introduit alors deux multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  et on applique le principe variationnel au nouveau Lagrangien  $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  étant considérés comme des constantes.

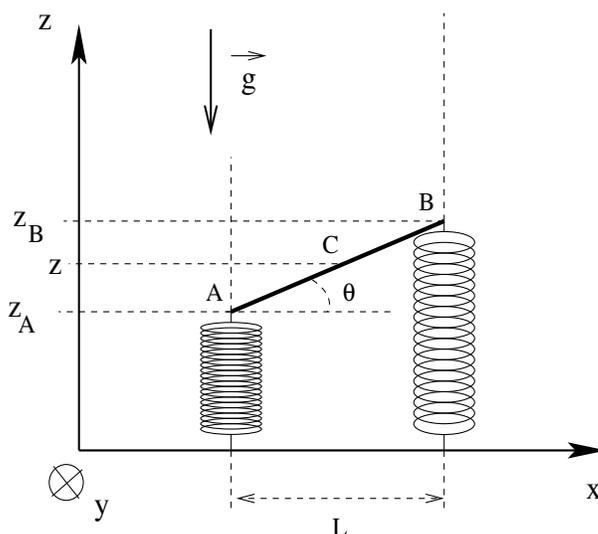
3°) Ecrire les équations d'Euler-Lagrange avec ce nouveau Lagrangien.

4°) a) Dans les équations pour  $x$  et pour  $z$ , substituer les dérivées secondes de  $x$  et de  $z$  par des combinaisons des dérivées de  $\theta$  en utilisant (7). En déduire les expressions de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  en fonction de  $\theta$  et de ses dérivées.

b) Reporter les expressions de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dans l'équation différentielle relative à  $\theta$  et en déduire l'équation d'évolution de  $\theta$ .

5°) A quoi ressemble le mouvement si la valeur initiale de  $\theta$  est très petite? Décrire ce mouvement.

### - Partie III -



Dans une autre expérience, les extrémités  $A$  et  $B$  de la barre sont reliées à deux ressorts identiques sans masse, de raideur  $K$ , de longueur au repos  $\ell_0$ . Les autres extrémités des ressorts sont fixées sur l'axe  $Ox$ , à la distance  $L$  l'une de l'autre, comme indiqué sur la figure. L'ensemble est dans le champ de pesanteur terrestre. On envisage pour ce dispositif des mouvements s'effectuant uniquement dans le plan  $xOz$ , et pour lesquels les ressorts se meuvent essentiellement parallèlement à l'axe  $Oz$ . On note  $z$  la cote de  $C$  et  $\theta$  l'angle de la barre avec l'axe  $Ox$ .

L'angle  $\theta$  est supposé rester suffisamment petit pour que l'on puisse faire les approximations suivantes :

◇ les deux ressorts restent constamment en position verticale (leurs mouvements transversaux sont faibles et négligés) ;

◇ on peut faire l'approximation  $\sin \theta \simeq \theta$ .

6°) Pour de tels mouvements, exprimer l'énergie cinétique de la barre en fonction de  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{z}$ ,  $M$  et  $I$ .

7°) a) Exprimer l'énergie potentielle totale  $E_r$  due aux deux ressorts, en fonction de  $z_A$ ,  $z_B$ ,  $\ell_0$  et  $K$ .

b) Exprimer  $z_A$  et  $z_B$  en fonction de  $z$ ,  $L$  et  $\theta$  (on rappelle que  $\sin \theta \simeq \theta$ ). En déduire l'expression de  $E_r$ , puis celle de l'énergie potentielle totale  $E_p$  de la barre (incluant l'énergie potentielle due à son poids), en fonction de  $z$  et  $\theta$ .

8°) Montrer qu'à l'équilibre de la barre, on a

$$z = z_e = \ell_0 - \frac{Mg}{2K}$$

9°) a) Définir pour la barre un Lagrangien pour lequel  $z$  et  $\theta$  représentent les coordonnées généralisées.

b) Ecrire les équations d'Euler-Lagrange correspondantes.

10°) a) Trouver les impulsions  $p_z$  et  $p_\theta$  associées à  $z$  et  $\theta$  respectivement.

b) En déduire le Hamiltonien  $H$  de la barre. Est-ce une constante du mouvement ? Pourquoi ?

11°) On considère le changement de variables  $p_z, p_\theta, z, \theta \rightarrow p_1, p_2, q_1, q_2$  défini par

$$p_z = \alpha \sqrt{q_1} \sin p_1 \quad , \quad p_\theta = \beta \sqrt{p_2} \cos q_2 \quad , \quad z = z_e + \frac{2}{\alpha} \sqrt{q_1} \cos p_1 \quad , \quad \theta = \frac{2}{\beta} \sqrt{p_2} \sin q_2$$

Calculer, relativement aux nouvelles variables  $p_1, p_2, q_1, q_2$ , les six crochets de Poisson

$$\{p_z, z\}, \{p_z, p_\theta\}, \{p_z, \theta\}, \{p_\theta, z\}, \{p_\theta, \theta\}, \{z, \theta\}$$

On rappelle la définition des crochets de Poisson :

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}$$

Que peut-on en conclure ?

12°) Exprimer le nouveau Hamiltonien  $H'$  correspondant aux nouvelles variables. Trouver  $\alpha$  et  $\beta$  pour que l'on ait

$$\frac{\partial H'}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial H'}{\partial q_2} = 0$$

Réexprimer alors  $H'$  en fonction de  $q_1$ ,  $p_2$  et  $\omega = \sqrt{\frac{2K}{M}}$ .

13°) a) Ecrire les équations canoniques relatives aux nouvelles variables.

b) Intégrer ces équations et trouver les équations horaires  $z(t)$  et  $\theta(t)$  sachant que pour  $t = 0$ , on a  $\dot{z} = 0$ ,  $\dot{\theta} = 0$ ,  $z = z_e + z_0$ ,  $\theta = \theta_0$ .

## Solutions n° 9

**I - Chute libre**  $\mathcal{L} = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] - mgz$ ,  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ , soit  $p_x = m\dot{x}$ , etc. D'où

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} [p_x^2 + p_y^2 + p_z^2] + mgz$$

### II - Bille dans un cerceau en rotation

1°)  $\mathcal{L} = \frac{m}{2} [\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta] - mgR \cos \theta$ . Ce Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, donc le Hamiltonien associé est une intégrale première du mouvement. On a  $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta}$ , d'où

$$H = p_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{p_\theta^2}{mR^2} + mgR \cos \theta - \frac{mR^2}{2} \omega^2 \sin^2 \theta$$

2°)  $\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mR \sin \theta (g + R\omega \cos \theta)$ , soit

$$\ddot{\theta} = \sin \theta \left( \frac{g}{R} + \omega \cos \theta \right)$$

3°) Les positions d'équilibre correspondent à  $\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$ , soit ici à  $\sin \theta \left( \frac{g}{R} + \omega \cos \theta \right) = 0$ . Il y a donc deux équilibres certains pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ , et un équilibre possible pour  $\cos \theta = -\frac{g}{R\omega}$ , si  $\omega > \frac{g}{R}$ . Pour décider de leur caractère stable ou instable, on examine le signe de la dérivée seconde  $\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = -mR [g \cos \theta + R\omega \cos 2\theta]$ . On trouve ainsi

- $\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2}(0) = -mR [g + R\omega] < 0$  : l'équilibre est instable ;
- $\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2}(\pi) = mR [g - R\omega]$  : l'équilibre est stable si  $\omega < \frac{g}{R}$ , instable si  $\omega > \frac{g}{R}$  ;
- $\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2}(\theta_0) = mR^2 \omega \left[ 1 - \frac{g^2}{R^2 \omega^2} \right] > 0$  car cet équilibre n'existe que si  $\omega > g/R$  : il est stable.

4°) L'énergie mécanique, définie comme  $E = E_c + E_p$ , diffère de  $H$  par le signe du terme centrifuge  $\frac{mR^2}{2} \omega^2 \sin^2 \theta$ , lequel fait partie intégrante de l'énergie cinétique pour  $E$ , tandis que pour  $H$  il représente une énergie potentielle fictive, d'origine inertielle. En fait, il est facile de voir que  $H$  représente l'énergie mécanique dans le référentiel tournant  $R'$  lié au cerceau

en rotation. Du point de vue de ce référentiel, la bille se déplace le long du cerceau situé dans un plan fixe. Tant que la bille reste en contact avec le cerceau, la force de réaction que le cerceau exerce sur elle est perpendiculaire à sa trajectoire (en l'absence de frottement) et ne travaille donc pas. Quant aux autres forces s'exerçant sur la bille dans  $R'$ , elles sont toutes vues comme dérivant des énergies potentielles incluses dans l'énergie mécanique définie dans  $R'$  et sont donc conservatives elles aussi :  $H$  est donc une constante du mouvement. Par contre, dans le référentiel  $R_\ell$  du laboratoire, la force de réaction du cerceau possède une composante orthogonale au plan du cerceau, et développe un travail non nul. Cette force non conservative provient en fait de l'accélération de Coriolis.

Dans  $R'$  on a  $\vec{v}' = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$  avec  $\vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{e}_z + \cos\theta \vec{e}_\rho$ ,  $\vec{e}_\rho = \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y$ , et l'accélération de Coriolis est  $\vec{a}_c = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}' = 2\omega\dot{\theta}R \cos\theta \vec{e}_\varphi$  avec  $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y$ .

Dans  $R_\ell$ , la vitesse et l'accélération ont des composantes perpendiculaires au plan du cerceau, données respectivement par  $v_\varphi = R\omega \sin\theta$  et  $a_\varphi = 2\omega\dot{\theta}R \cos\theta$ , cette dernière coïncidant avec l'accélération de Coriolis. La force de réaction a donc elle aussi une composante  $R_\varphi$  donnée par  $R_\varphi = ma_\varphi = 2mR\dot{\theta}\omega \cos\theta$  et développe la puissance  $P_\varphi = v_\varphi R_\varphi = 2m\omega^2 R^2 \dot{\theta} \sin\theta \cos\theta$  et l'on vérifie que l'on a bien  $\frac{dE}{dt} = P_\varphi \neq 0$ .

### III - Oscillateur harmonique à une dimension

1°)  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ , d'où  $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$ .

2°)  $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$ ,  $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$ .

3°)

$$\{p, x\} = \frac{\partial p}{\partial P} \frac{\partial x}{\partial Q} - \frac{\partial p}{\partial P} \frac{\partial x}{\partial Q} = \left[ \sqrt{\frac{\lambda}{2P}} \cos Q \right] \left[ \sqrt{\frac{2P}{\lambda}} \cos Q \right] - \left[ -\sqrt{2\lambda P} \sin Q \right] \left[ \sqrt{\frac{1}{2\lambda P}} \sin Q \right] = 1$$

4°) En choisissant  $\lambda = \sqrt{km}$ , on obtient  $H = H' = \omega P$  où  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

5°)  $\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0$ ,  $\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega$ , d'où  $P = \text{constante}$ ,  $Q = \omega t + Q_0$ ; puis

$$x(t) = \sqrt{\frac{2P}{\lambda}} \sin(\omega t + Q_0), \quad p(t) = \sqrt{2\lambda P} \cos(\omega t + Q_0)$$

6°) a)  $\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{p}{m}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x} = kx$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial p} = -\frac{x}{2P}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{p}{2P}$ , d'où

$$\{P, Q\} = \left(\frac{p}{m}\right)\left(\frac{p}{2P}\right) - (kx)\left(-\frac{x}{2P}\right) = \frac{1}{2P} \left[\frac{p^2}{m} + kx^2\right] = 1$$

b)  $H = P$ ,  $\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0$ ,  $\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = 1$ , d'où  $P = \text{constante}$ ,  $Q = t + t_0$ , et

$$x = \sqrt{\frac{2P}{m}} \sin \omega Q = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad p = \sqrt{2mP} \cos \omega Q = p_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

#### IV - Oscillateur harmonique à deux dimensions

1°)  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ , soit  $p_x = m\dot{x}$ ,  $p_y = m\dot{y}$ , puis  $H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \mathcal{L} = \frac{2}{2m} [p_x^2 + p_y^2] + \frac{k}{2} [x^2 + y^2]$

2°) On vérifie que  $\{p_x, x\}_{P,Q} = \{p_y, y\}_{P,Q} = 1$ , tous les autres crochets étant nuls. Il s'agit bien d'une transformation canonique.

3°)  $H(P_1, P_2, Q_1, Q_2) = \omega(P_1 + P_2)$ , puis

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial Q_1} = 0, & \dot{P}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial Q_2} = 0 \\ \dot{Q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial P_1} = \omega, & \dot{Q}_2 &= \frac{\partial H}{\partial P_2} = \omega \end{aligned}$$

donc  $\dot{Q}_1 - \dot{Q}_2 = 0$  et  $Q_1 - Q_2 = \text{constante}$ .

#### V - Transformation canonique I

1°)  $\{p_1, q_1\} = \frac{\partial p_1}{\partial P_1} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} - \frac{\partial p_1}{\partial Q_1} \frac{\partial q_1}{\partial P_1} + \frac{\partial p_1}{\partial P_2} \frac{\partial q_1}{\partial Q_2} - \frac{\partial p_1}{\partial Q_2} \frac{\partial q_1}{\partial P_2} = 1$ ;

$\{p_2, q_2\} = \frac{\partial p_2}{\partial P_1} \frac{\partial q_2}{\partial Q_1} - \frac{\partial p_2}{\partial Q_1} \frac{\partial q_2}{\partial P_1} + \frac{\partial p_2}{\partial P_2} \frac{\partial q_2}{\partial Q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial Q_2} \frac{\partial q_2}{\partial P_2} = 1$ ; tous les autres crochets sont nuls.

2°)  $H = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$ ;  $\frac{\partial H}{\partial P_1} = \dot{Q}_1 = 0$ ,  $\frac{\partial H}{\partial P_2} = \dot{Q}_2 = 0$ ,  $\frac{\partial H}{\partial Q_1} = -\dot{P}_1 = \lambda_1$ ,  $\frac{\partial H}{\partial Q_2} = -\dot{P}_2 = \lambda_2$ , d'où  $Q_1 = \text{constante}$ ,  $Q_2 = \text{constante}$ ,  $P_1 = -\lambda_1 t + A_1$ ,  $P_2 = -\lambda_2 t + A_2$ ,  $A_1$  et  $A_2$  étant des constantes. On en déduit

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{\frac{2Q_1}{\lambda_1}} \cos(\lambda_1 t - A_1) + \sqrt{\frac{2Q_2}{\lambda_2}} \cos(\lambda_2 t - A_2), & p_1 &= \dot{q}_1/2 \\ q_2 &= -\sqrt{\frac{2Q_1}{\lambda_1}} \cos(\lambda_1 t - A_1) + \sqrt{\frac{2Q_2}{\lambda_2}} \cos(\lambda_2 t - A_2), & p_2 &= \dot{q}_2/2 \end{aligned}$$

## VI - Transformation canonique II

$$1^\circ) \frac{\partial H}{\partial q} = -8pq + 1 + 8q^3 = -\dot{p}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = 4p - 4q^2 = \dot{q}.$$

$$2^\circ) \text{ a) } \tilde{H}(P, Q) = H(p(P, Q), q(P, Q)) = P^2 + Q.$$

$$\text{b) } \{P, Q\} = \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} = 1 \times [1 + 4q(q^2 - p)] - (-2q) \times [2(p - q^2)] = 1$$

$$3^\circ) \frac{\partial H}{\partial Q} = 1 = -\dot{P}, \quad \frac{\partial H}{\partial P} = 2P = \dot{Q}, \text{ d'où, compte tenu des conditions initiales, } P = -t, \\ Q = -t^2.$$

$$4^\circ) q = Q - P^2 = -2t^2, \text{ puis } p = P + q^2 = -t + 4t^4.$$

## VII - Transformation canonique III

$$1^\circ) p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}; \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p} = -m\omega^2 x, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x} = \frac{p}{m}.$$

$$2^\circ) x = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q.$$

Le nouveau Hamiltonien  $H'(Q, P)$  est tel que  $H'(Q, P) = H(x(Q, P), p(Q, P))$  car

$$H' - H = \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \text{ puisque } F \text{ ne dépend pas explicitement du temps. On a } H'(P, Q) = \omega P.$$

$$3^\circ) \{p, x\}_{(p,q)} = \frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial x}{\partial q} - \frac{\partial p}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial p} = 1; \text{ on doit avoir } \{p, q\}_{(P,Q)} = \frac{\partial p}{\partial P} \frac{\partial q}{\partial Q} - \frac{\partial p}{\partial Q} \frac{\partial q}{\partial P} = 1, \text{ ce} \\ \text{qui est bien le cas ici :}$$

$$\{p, q\}_{(P,Q)} = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2P}} \cos Q\right) \left(\sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \cos Q\right) - \left(-\sqrt{2m\omega P} \sin Q\right) \left(\sqrt{\frac{1}{2m\omega P}} \sin Q\right) = 1$$

$$4^\circ) \frac{\partial H'}{\partial Q} = -\dot{P} = 0, \quad \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega = \dot{Q}, \text{ d'où } P = \text{constante}, \quad Q = \omega t + Q_0 \text{ où } Q_0 \text{ est une} \\ \text{constante, et l'on obtient } x(t) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin(\omega t + Q_0).$$

### VIII - Mouvement libre et mouvements astreints d'une barre

$$1^\circ) I = \frac{ML^2}{12}.$$

$$2^\circ) \text{ a) } E_c = \frac{M}{2} [\dot{x}^2 + \dot{z}^2] + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2, \quad E_p = Mgz, \quad \mathcal{L} = \frac{M}{2} [\dot{x}^2 + \dot{z}^2] + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - Mgz$$

$$\text{b) } \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = M\ddot{x} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = M\ddot{z} = M\ddot{z} + Mg = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = I\ddot{\theta} = 0, \text{ d'où}$$

$$x = t\dot{x}(0) + x(0), \quad z = -\frac{gt^2}{2} + t\dot{z}(0) + z(0), \quad \dot{\theta} = \text{constante}$$

Dans le plan  $xOz$ , le mouvement libre le plus général de la barre est constitué, selon les conditions initiales, d'un mouvement parabolique de son centre de masse associé à un mouvement de rotation uniforme de la barre autour de son centre.

$$3^\circ) \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x} = M\ddot{x} - \lambda_1 = 0; \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{z}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial z} = M\ddot{z} + Mg - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \theta} = I\ddot{\theta} + \lambda_1 D \cos \theta + \lambda_2 D \sin \theta = 0.$$

$$4^\circ) \text{ a) } \lambda_1 = MD \left[ \ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta \right], \quad \lambda_2 = Mg + MD \left[ \ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta \right].$$

$$\text{b) } \ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{MgD}{I + MD^2}}.$$

5°)  $\ddot{\theta} \simeq \omega_0^2 \theta$ . Mouvement d'oscillations périodique autour de la position  $\theta = 0$ ,

$$6^\circ) E_c = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2.$$

$$7^\circ) \text{ a) b) } E_p = Mgz + \frac{1}{2} K(z_A - \ell_0)^2 + \frac{1}{2} K(z_B - \ell_0)^2, \text{ et comme } z_A = z - \frac{L}{2}\theta, \quad z_B = z + \frac{L}{2}\theta,$$

$$\text{il vient } E_p = Mgz + K(z - \ell_0)^2 + \frac{KL^2}{4}\theta^2.$$

8°) Dans une position d'équilibre, l'énergie potentielle est extremum. On a  $\frac{\partial E_p}{\partial z} = Mg + 2K(z - \ell_0) = 0$  pour la seule valeur de  $z = z_e = \ell_0 - \frac{Mg}{2K}$ ; et  $\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = KL^2\theta/2 = 0$ , soit  $\theta_e = 0$ . On vérifie que l'équilibre est stable.

$$9^\circ) \text{ a) } \mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - Mgz - K(z - \ell_0)^2 - \frac{KL^2}{4}\theta^2.$$

$$\text{b) } \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = M\ddot{z} + Mg + 2K(z - \ell_0) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = I\ddot{\theta} + \frac{KL^2}{2}\theta = 0.$$

10°) a)  $p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = M\dot{z}$ ,  $p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta}$ .

b)  $H = p_z \dot{z} + p_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{2M} + \frac{p_\theta^2}{2I} + Mgz + K(z - \ell_0)^2 + \frac{KL^2}{4}\theta^2$ . Ce Hamiltonien est une constante du mouvement car le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps.

11°)  $\{p_z, z\} = 1$ ,  $\{p_z, p_\theta\} = 0$ ,  $\{p_z, \theta\} = 0$ ,  $\{p_\theta, z\} = 0$ ,  $\{p_\theta, \theta\} = 1$ ,  $\{z, \theta\} = 0$ .

Il s'agit d'une transformation canonique.

12°)  $H' = \frac{\alpha^2}{2M} q_1 \sin^2 p_1 + \frac{\beta^2}{2I} p_2 \cos^2 q_2 + Mg(z_e + \frac{2}{\alpha} \sqrt{q_1} \cos p_1) + K(-\frac{Mg}{2K} + \frac{2}{\alpha} \sqrt{q_1} \cos p_1)^2 + \frac{KL^2}{\beta^2} p_2 \sin^2 q_2$

$$\frac{\partial H'}{\partial p_1} = q_1 \sin p_1 \cos p_1 \left[ \frac{\alpha^2}{M} - \frac{8K}{\alpha^2} \right], \quad \frac{\partial H'}{\partial q_2} = 2p_2 \sin q_2 \cos q_2 \left[ \frac{2KL^2}{\beta^2} - \frac{\beta^2}{I} \right]$$

En choisissant  $\alpha = (8KM)^{1/4}$  et  $\beta = (2KL^2I)^{1/4}$ , on rend  $H'$  indépendant de  $p_1$  et  $q_2$ .

On a alors  $H' = \omega [q_1 + \sqrt{3}p_2]$  où l'on a tenu compte de  $I = ML^2/12$ .

13°) a) Les équations canoniques  $\frac{\partial H'}{\partial p_k} = \dot{q}_k$ ,  $\frac{\partial H'}{\partial q_k} = -\dot{p}_k$  donnent ici

$$\frac{\partial H'}{\partial p_1} = 0 = \dot{q}_1, \quad \frac{\partial H'}{\partial p_2} = \omega\sqrt{3} = \dot{q}_2, \quad \frac{\partial H'}{\partial q_1} = \omega = -\dot{p}_1, \quad \frac{\partial H'}{\partial q_2} = 0 = -\dot{p}_2$$

b)  $q_1 = \text{constante}$ ;  $p_2 = \text{constante}$ ;  $q_2 = \omega\sqrt{3}t + c_1$ ,  $p_1 = -\omega t + c_2$ . On en déduit

$$z = z_e + \frac{2}{\alpha} \sqrt{q_1} \cos(\omega t - c_1), \quad \theta = \frac{2}{\beta} \sin(\omega\sqrt{3}t + c_1)$$

L'application des conditions initiales conduit à  $c_2 = 0$ ,  $z_0 = \frac{2}{\alpha} \sqrt{q_1}$ ,  $c_1 = \pi/2$ ,  $\theta_0 = \frac{2}{\beta} \sqrt{p_2}$ , d'où l'on déduit

$$z = z_e + z_0 \cos(\omega t), \quad \theta = \theta_0 \cos(\omega\sqrt{3}t)$$

## Exercices n° 10

### - Hamiltoniens et transformations canoniques II -

#### I - La force de Lorentz

On envisage le principe variationnel pour une particule de charge  $e$  placée dans un champ électromagnétique décrit par le potentiel-vecteur  $\vec{A}$  et le potentiel scalaire  $\Phi$ . Le Lagrangien correspondant s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{m \vec{v}^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}$$

où  $m$  et  $\vec{v}$  sont, respectivement, la masse et la vitesse de la particule, et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.

1°) Ecrire les équations d'Euler-Lagrange. Identifier les termes en substituant les composantes du champ électrique  $\vec{E}$

$$E_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t}$$

et celles du champ magnétique  $\vec{B}$ , données par

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = c \epsilon_{ijk} B_k$$

avec  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

2°) Définir les impulsions  $p_k$  dérivant du Lagrangien ci-dessus. En déduire la fonction de Hamilton  $H$  correspondante, fonction des coordonnées  $x_k$  et des impulsions  $p_k$ .

3°) Vérifier que les équations de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{x}_i$$

conduisent aux mêmes équations du mouvement.

## II - Electron dans un champ magnétique -

Un électron, particule de masse  $m$  et de charge électrique négative  $-e$ , est placé dans un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B}$  parallèle à un axe vertical  $Oz$ . L'effet de la pesanteur terrestre est négligée. On montre que, dans ces conditions, le Hamiltonien de l'électron peut être écrit sous la forme

$$H = \frac{1}{2m} \left[ \left( p_x - \frac{1}{2} m \omega y \right)^2 + \left( p_y + \frac{1}{2} m \omega x \right)^2 \right] \quad \text{où } \omega = \frac{eB}{m}$$

1°) a) Ecrire les équations canoniques pour les variables  $x, y, p_x, p_y$  et en déduire les expressions de  $p_x$  et  $p_y$  en fonction de  $x, y, \dot{x}$  et  $\dot{y}$ . Conclusion ?

b) En éliminant  $p_x, p_y, \dot{p}_x$  et  $\dot{p}_y$  des équations, trouver les équations différentielles que doivent satisfaire  $x$  et  $y$ .

2°) On envisage la transformation

$$x = \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{m\omega}} \quad , \quad y = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{m\omega}} \quad , \quad p_x = \frac{1}{2} \sqrt{m\omega} (P_1 + P_2) \quad , \quad p_y = \frac{1}{2} \sqrt{m\omega} (-Q_1 + Q_2)$$

En utilisant les crochets de Poisson, montrer qu'il s'agit d'une transformation canonique.

3°) a) Exprimer le Hamiltonien en fonction des nouvelles coordonnées.

b) Ecrire les équations canoniques relatives à ces coordonnées, puis les intégrer pour obtenir  $Q_1, Q_2, P_1$  et  $P_2$  en fonction du temps.

c) Déduire de ces résultats les équations horaires  $x(t)$  et  $y(t)$ . Quelle est la trajectoire de l'électron ?

## III - Systèmes conservatifs - Constantes de mouvement

On considère le Lagrangien d'une particule de masse  $m$  dans un champ de forces centrales dérivant du potentiel  $V(r)$

$$\mathcal{L} = \frac{m \vec{v}^2}{2} - V(r)$$

1°) Exprimer le Lagrangien au moyen des coordonnées sphériques et leurs vitesses. Ecrire les équations d'Euler-Lagrange correspondantes.

2°) Définir les impulsions canoniques. En déduire la fonction de Hamilton puis les équations canoniques de Hamilton. Trouver les deux constantes du mouvement.

3°) a) Que peut-on dire du moment cinétique  $\vec{L} = m \vec{r} \wedge \vec{v}$  ?

b) A coté du moment cinétique, on introduit le vecteur de Runge et Lenz

$$\vec{R} = \vec{v} \wedge \vec{L} - \vec{r} r \frac{dV}{dr}$$

Trouver quelle doit être la forme générale de  $V(r)$  pour que ce vecteur soit une constante vectorielle du mouvement.

**Solutions n° 10**

**I - La force de Lorentz**

$$1^\circ) p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_k} = mv_k + \frac{e}{c} A_k, \text{ et}$$

$$\dot{p}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = -e\partial_k \Phi + \frac{e}{c} \partial_k (\vec{v} \cdot \vec{A}) = eE_k + \frac{e}{c} \left[ \frac{\partial A_k}{\partial t} + \partial_k (\vec{v} \cdot \vec{A}) \right] = ma_k + \frac{e}{c} \frac{dA_k}{dt}$$

$a_k$  étant une composante de l'accélération et  $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ . Or,  $\frac{dA_k}{dt} = \frac{\partial A_k}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} A_k$ , d'où

$$ma_k = eE_k + \frac{e}{c} \sum_i [v_i \partial_k A_i - v_i \partial_i A_k] = eE_k + e\epsilon_{kij} v_i B_j$$

soit, sous forme vectorielle

$$m \vec{a} = e \vec{E} + e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

où l'on voit apparaître la force de Lorentz  $e \vec{v} \wedge \vec{B}$ .

$$2^\circ) H = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \vec{v} \cdot \left( m \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) - \frac{1}{2} m v^2 + e\Phi - \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} = \frac{1}{2} m v^2 + e\Phi, \text{ soit}$$

$$H = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\Phi$$

$$3^\circ) \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{1}{m} \left( p_k - \frac{e}{c} A_k \right) = v_k = \dot{x}_k, \quad \frac{\partial H}{\partial x_k} = -\dot{p}_k = -\frac{e}{mc} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \partial_k \vec{A} + e\partial_k \Phi,$$

soit  $\dot{p}_k = -e\partial_k \Phi + \frac{e}{c} \partial_k (\vec{v} \cdot \vec{A})$  : on obtient bien les mêmes équations du mouvement.

**II - Electron dans un champ magnétique**

$$1^\circ) \text{ a) } p_x = m\dot{x} + \frac{1}{2} m\omega y, \quad p_y = m\dot{y} - \frac{1}{2} m\omega x, \quad \dot{p}_x = -\frac{m\omega}{2} \dot{y}, \quad \dot{p}_y = \frac{m\omega}{2} \dot{x}.$$

b)  $\ddot{x} = -\omega \dot{y}$ ,  $\ddot{y} = \omega \dot{x}$ . Sous forme vectorielle, on trouve  $m \vec{a} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$  avec  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ .

2°)  $\{p_x, x\}_{(P,Q)} = 1$ ,  $\{p_y, y\}_{(P,Q)} = 1$ , les autres crochets sont nuls. Il s'agit bien d'une transformation canonique.

$$3^\circ) \text{ a) } H = \frac{\omega}{2} (P_2^2 + Q_2^2).$$

b)  $\frac{\partial H}{\partial P_1} = 0 = \dot{Q}_1$ ,  $\frac{\partial H}{\partial Q_1} = 0 = -\dot{P}_1$  :  $Q_1$  et  $P_1$  sont des constantes du mouvement.

$\frac{\partial H}{\partial P_2} = \omega P_2 = \dot{Q}_2$ ,  $\frac{\partial H}{\partial Q_2} = \omega Q_2 = -\dot{P}_2$ , d'où  $\ddot{Q}_2 = -\omega^2 Q_2$ , équation dont la solution générale est  $Q_2 = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ ,  $A$  et  $B$  étant des constantes. Puis  $P_2 = \frac{1}{\omega} \dot{Q}_2 = -A \sin \omega t + B \cos \omega t$ .

c)  $x(t) = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} [Q_1 + A \cos \omega t + B \sin \omega t]$ ;  $y(t) = \frac{1}{\sqrt{m\omega}} [P_1 + A \cos \omega t - B \sin \omega t]$

### III - Systèmes conservatifs - Constantes de mouvement

1°) 2°)  $\mathcal{L} = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2] - V(r)$ ;

$$p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\dot{\theta}^2 + m\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - \frac{dV}{dr};$$

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}, \quad p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2;$$

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}, \quad p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0;$$

$p_\varphi$  est donc une constante du mouvement. Ce résultat est attribuable à la symétrie sphérique de l'énergie potentielle.

$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \frac{m}{2} [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2] + V(r)$ . Le Hamiltonien est une constante

du mouvement car le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps :  $\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ .

On a donc deux constantes du mouvement :  $p_\varphi$  et  $H$ .

3°) a)  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{m}\vec{a} = -\frac{dV}{dr} \vec{r} \wedge \vec{e}_r = \vec{0}$  car la force dérivant de  $V(r)$  est une force centrale. Le moment cinétique est une constante vectorielle du mouvement.

Compte tenu du a), on a

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{R}}{dt} &= \vec{m}\vec{a} \wedge \left[ \vec{r} \wedge \vec{v} \right] - \dot{r} \vec{r} \frac{dV}{dr} - r \vec{v} \frac{dV}{dr} - r\dot{r} \vec{r} \frac{d^2V}{dr^2} \\ &= -r \frac{dV}{dr} \left[ \dot{r} \vec{e}_r - \vec{v} \right] - \dot{r} \vec{r} \frac{dV}{dr} - r \vec{v} \frac{dV}{dr} - r\dot{r} \vec{r} \frac{d^2V}{dr^2} \\ &= -r\dot{r} \vec{e}_r \left[ 2 \frac{dV}{dr} + r \frac{d^2V}{dr^2} \right] \end{aligned}$$

Le vecteur  $\vec{R}$  n'est donc constant que si  $V''/V' = -2/r$ . Après intégration et en écartant

le cas inintéressant  $V = \text{constante}$ , on trouve que  $V$  doit être un potentiel newtonien :  
 $V(r) = \frac{K}{r}$  (gravitationnel, électrostatique).